

5. ATOM – ORBITNI I SPINSKI MAGNETIZAM

Poznato je iz elektromagnetike da je magnetna indukcija (magnetno polje) u slobodnom prostoru prouzrokovana kretanjem naelektrisanja odnosno tokom električne struje. Na isti način, magnetna indukcija u materiji (magnetizam materije) pripisuje se postojanju mikrostruja u njoj. Ove struje nazivaju se Amperovim strujama zato što ideja o njihovom postojanju potiče još od Ampera, dakle, mnogo pre otkrića elektrona. Amperova hipoteza nailazila je na teškoće jer njome nije moglo da se objasni postojano održavanje ovih struja bez utroška energije. Međutim, kao što je već delom pokazano u prethodnim poglavljima, pojam mikrostruja ne samo da ne protivreči savremenom shvatanju strukture materije nego se njegovom neposrednom primenom kvantitativno objašnjava veliki broj pojava vezanih za magnetizam materije.

Glavni problem u vezi sa magnetnim osobinama materije jeste pitanje porekla elementarnog magnetizma. U ovom poglavlju opisaćemo pojave orbitnog i spinskog magnetizma, njihovo međusobno dejstvo kao i njihove interakcije sa spoljašnjim magnetnim poljem.

5.1 MAGNETNI MOMENT ATOMA VODONIKA

DODATAK 5.1

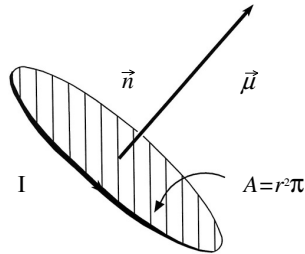
D-5.1.1 Magnetni moment strujne konture

Magnetni moment strujne konture $\vec{\mu}_p$. Slika D-5.1.1, proporcionalan je veličini površine A koju opisuje kontura i jačini struje I koja kroz nju prolazi:

$$\vec{\mu}_p = IA\vec{n}. \quad (\text{D-5.1.1a})$$

Jedinični vektor \vec{n} normalan na ravan konture određuje pravac delovanja magnetnog momenta. Smer magnetnog momenta sledi pravilo desne ruke u odnosu na tok električne struje. Za kružnu konturu poluprečnika r površina je $r^2\pi$, pa je:

$$\vec{\mu}_p = r^2 \pi I \vec{n}. \quad (\text{D-5.1.1b})$$



Slika D-5.1.1 Magnetni moment strujne konture upravljen je normalno na ravan konture, a smer mu se određuje po pravilu desne ruke u odnosu na tok električne struje.

5.1.1 Orbitni magnetni moment

Poznato je (odjeljak D-5.1.1) da makroskopska strujna kontura ima magnetni moment, tj., da ima osobine magnetnog dipola. Slično tome, očekivalo bi se da elektron, kružeći po Borovoj orbiti, izazove pojavu orbitnog magnetnog momenta. Elektronska (Borova) orbita, zapravo, predstavlja mikroskopsku strujnu konturu kroz koju protiče Amperova struja. Magnetni moment orbite može da se izrazi istom jednačinom kao i magnetni moment makroskopske strujne konture:

$$\vec{\mu}_p = I \vec{A} \quad (Am^2). \quad (\text{D-5.1.1a}) \quad (5.1.1)$$

Ovde je I struja koju stvara elektron kružeći po orbiti (Amperova struja), a \vec{A} vektor koji je normalan na ravan orbite i čiji je intenzitet jednak veličini površine koju orbita opisuje, a smer mu određuje tok električne struje po pravilu desne ruke. Indeks p označava da magnetni moment vodi poreklo od orbitnog kretanja elektrona. S obzirom na to da je vektor magnetnog momenta $\vec{\mu}_p$ paralelan vektoru \vec{A} , znači da je i magnetni moment normalan na ravan orbite.

Jačina električne struje, kao količina naelektrisanja koja prođe kroz presek provodnika u jedinici vremena, za elektronsku orbitu u kojoj naelektrisanje $-e$ opiše jedan krug u vremenu T , data je izrazom:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{-e}{T} \quad (5.1.2a)$$

ili izražavanjem perioda T preko kružne frekvencije ($T = 2\pi/\omega$):

$$I = -\frac{e\omega}{2\pi}. \quad (5.1.2b)$$

Ako kružnu frekvenciju ω izrazimo preko orbitnog ugaonog momenta p_ϕ :

$$\omega = \frac{p_\phi}{mr^2} \quad (\text{D-4.6.3b})$$

dobijamo da je:

$$I = -\frac{ep_{\phi}}{2\pi mr^2} \quad (5.1.3a)$$

a s obzirom na to da je orbita kružna, tj. $r^2\pi = A$:

$$I = -\frac{ep_{\phi}}{2mA}. \quad (5.1.3b)$$

Vežu između orbitnog magnetnog momenta i orbitnog ugaonog momenta nalazimo zamenom izraza (5.1.3b) u (5.1.1):

$$\vec{\mu}_p = -\frac{ep_{\phi}}{2mA}\vec{A} = -\frac{e}{2m}p_{\phi}\vec{n}$$

i pošto je $p_{\phi}\vec{n} = \vec{p}_{\phi}$:

$$\vec{\mu}_p = -\frac{e}{2m}\vec{p}_{\phi}. \quad (5.1.4)$$

Iz poslednjeg izraza vidi se da je orbitni magnetni moment proporcionalan orbitnom ugaonom momentu i (zbog negativnog znaka) antiparalelan njemu. Odnos magnetnog i mehaničkog orbitnog momenta šematski je prikazan na Slici 5.1.1.

Koeficijent proporcionalnosti kojim se izražava odnos magnetnog i ugaonog orbitnog momenta ne zavisi od osobina orbite i kao kombinacija osnovnih konstanti (elementarnog naelektrisanja i mase elektrona) ima univerzalni karakter, jednačina (5.1.4). Iz iste jednačine neposredno dobijamo izraz za odnos magnetnog i mehaničkog orbitnog momenta:

$$\gamma_p = \frac{\vec{\mu}_p}{\vec{p}_{\phi}} = -\frac{e}{2m}. \quad (5.1.5)$$

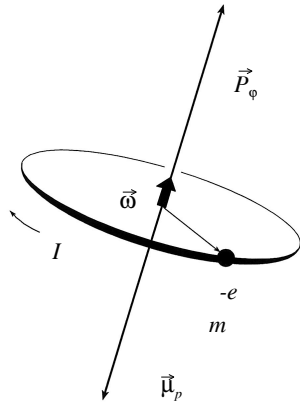
Veličina γ_p naziva se orbitni magnetomehanički odnos ili orbitni žiromagnetni odnos i ima vrednost jednaku polovini specifičnog naelektrisanja elektrona:

$$\gamma_p = -\frac{e}{2m} = -8,79402 \times 10^{10} \left(\frac{\text{C}}{\text{kg}} \right) \text{ ili } \left(\frac{\text{s}^{-1}}{\text{T}} \right). \quad (5.1.6)$$

Orbitni magnetni i mehanički moment, kao što se vidi iz izraza (5.1.5) odnose se (do konstantnog faktora 0.5) kao naelektrisanje i masa elektrona. S obzirom na to da su masa i naelektrisanje osnovne osobine elektrona duboko povezane sa njegovim postojanjem, i veza između orbitnog magnetnog i orbitnog ugaonog momenta je neraskidiva.

Zamenom izraza (5.1.5) u (5.1.4) dobijamo da je:

$$\vec{\mu}_p = \gamma_p \vec{p}_{\phi}. \quad (5.1.7)$$



Slika 5.1.1 Orbitni magnetni moment $\vec{\mu}_p$ potiče od kružnog kretanja naelektrisanja, isto kao što orbitni ugaoni moment \vec{p}_ϕ , potiče od kružnog kretanja mase. Zbog negativnog znaka naelektrisanja elektrona, vektori \vec{p}_ϕ i $\vec{\mu}_p$ su antiparalelni.

Pošto je orbitni ugaoni moment kvantovan, to je i orbitni magnetni moment koji je njemu proporcionalan, takođe kvantovan. Najmanja jedinica ugaonog momenta (kvant ugaonog momenta) je \hbar . Zamenom ove vrednosti u izrazu (5.1.7) ($|\vec{p}_\phi|_{jed.} = \hbar$), nalazimo najmanju jedinicu (kvant) orbitnog magnetnog momenta:

$$|\vec{\mu}_p|_{jed.} = -\gamma_p \hbar \quad (5.1.8)$$

koja se naziva Borov magneton i označava μ_B . Iz jednačine (5.1.8) neposredno dobijamo izraz za Borov magneton:

$$\mu_B = -\gamma_p \hbar \quad (5.1.9a)$$

koji, s obzirom na (5.1.5), može da se napiše i u obliku:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}. \quad (5.1.9b)$$

Zamenom vrednosti univerzalnih konstanti u izrazima (5.1.9), dobijamo da je:

$$\mu_B = 9,27401 \times 10^{-24} \quad \text{JT}^{-1} \quad \text{ili} \quad \text{Am}^2. \quad (5.1.9c)$$

Preporučena vrednost iz 1998. godine je:

$$\begin{aligned} \mu_B &= 9,27400899(37) \times 10^{-24} \quad \text{JT}^{-1} \\ &= 5,788381749(43) \times 10^{-5} \quad \text{eVT}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1.9d)$$

Nesrećna je činjenica, koju uvek treba imati na umu, da se isti simbol μ koristi za magnetne momente μ_p i μ_s , za Borov magneton μ_B i za magnetnu propustljivost vakuuma μ_0 . Borov magneton, kao što će biti pokazano u odeljku 5.1.2, predstavlja najmanju jedinicu i za spinski magnetni moment μ_s . Zbog toga, Borov magneton predstavlja najmanju jedinicu – kvant elektronskog paramagnetizma. (Za opisivanje

magnetnih osobina atomskog jezgra koristi se odgovarajuća veličina – nuklearni magneton.)

Znajući vrednost osnovne jedinice magnetnog momenta i njegov odnos prema orbitnom ugaonom momentu lako se nalaze uslovi kvantovanja orbitnog magnetnog momenta. Prvo ćemo vezu između magnetnog i ugaonog momenta, jednačina (5.1.7), da izrazimo preko Borovog magnetona μ_B , koristeći izraz (5.1.9a):

$$\vec{\mu}_p = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{p}_\varphi. \quad (5.1.10a)$$

Zamenom jednačine za kvantovanje orbitnog ugaonog momenta:

$$(4.6.38) \quad \vec{p}_\varphi = n_\varphi \hbar \vec{n}$$

u jednačinu (5.1.10a), dobijamo izraz za kvantovanje orbitnog magnetnog momenta:

$$\vec{\mu}_p = -n_\varphi \mu_B \vec{n} \quad (5.1.10b)$$

ili u skalarnom obliku:

$$\mu_p = n_\varphi \mu_B. \quad (5.1.10c)$$

Dakle, orbitni magnetni moment kvantuje se na isti način kao i orbitni ugaoni moment, s tom razlikom što je kvant ugaonog momenta \hbar , zamenjen kvantom magnetnog momenta – Borovim magnetonom μ_B .

5.1.2 Spinski magnetni moment

U odeljku 4.8 videli smo da je za objašnjenje spektara alkalnih metala bilo potrebno pretpostaviti postojanje sopstvenog ugaonog momenta elektrona, dakle, spina. U istom smislu bilo je pretpostavljeno da je orbitni ugaoni moment jednak nuli $|\vec{l}| = 0$ kada su elektroni u s stanju. Iz toga sledi da je jednoelektronski atom (tačnije, atom koji, pored elektrona u popunjenim ljuskama, ima još samo jedan valentni elektron) u osnovnom stanju treba da bude dijamagnetan. Međutim, eksperimentalno je pokazano da su takvi atomi (kao što će biti opisano u odeljku 6.1) paramagnetni, tj. da imaju magnetni moment. Uzrok paramagnetizma ovih atoma jeste postojanje sopstvenog elektronskog magnetnog momenta koji je pridružen elektronskom spinu. Zbog toga bi priča o orbitnom magnetnom i mehaničkom momentu elektrona mogla da se ponovi i za sopstveni magnetni i mehanički moment elektrona. Jedina razlika je ta što se elektron umesto oko atomskog jezgra sada kreće oko sopstvene ose. Ova analogija je korisna za stvaranje zamišljene slike ali se ne treba previše oslanjati na nju jer se već u prvom pokušaju da se njome opiše odnos između spinskog magnetnog i spinskog mehaničkog momenta nailazi na ozbiljne teškoće.

Kao kod orbitnog ugaonog, \vec{p}_φ , i magnetnog, $\vec{\mu}_p$, momenta koji se javljaju zbog kretanja elektrona po orbiti oko atomskog jezgra, spinski ugaoni moment, \vec{s} , i spinski magnetni moment, $\vec{\mu}_s$, mogu da se smatraju posledicom rotacije mase i naelektrisanja elektrona oko sopstvene ose, Slika 5.1.2. Po ugledu na izraz (5.1.7) izveden za orbitne momente, za sopstvene momente (magnetni i mehanički) imamo:

$$\vec{\mu}_s = \gamma_s \vec{s} \quad (5.1.11)$$

gde je γ_s sopstveni (ili spinski) žiromagnetni odnos elektrona. Pošto su ovde u pitanju ista masa i isto naelektrisanje kao i kod orbitnog kretanja, očekivalo bi se da je sopstveni žiromagnetni odnos elektrona γ_s jednak orbitnom žiromagnetnom odnosu elektrona γ_p . Međutim, empirijski je nađeno da je:

$$\gamma_s = 2,0023\gamma_p \quad (5.1.12a)$$

što se ne može objasniti klasičnim predstavama o rotaciji elektrona oko sopstvene ose. Za teorijsko određivanje odnosa (5.1.12a) potrebno je uzeti u obzir kako talasnu prirodu elektrona, tako i relativističke uticaje vezane za njegovu prirodu, kao što je učinio Dirak. Na osnovu relativističke kvantne teorije, on je dobio da je:

$$\gamma_s = 2\gamma_p. \quad (5.1.12b)$$

To je dovoljno da se valjano opiše najveći broj pojava vezanih za elektrone. Mala razlika od $\approx 0,1\%$ između izraza (5.1.12a) i (5.1.12b) javlja se zbog dejstva elektrona sa sopstvenim radijacionim poljem. Ovaj uticaj Dirakova teorija ne uzima u obzir i zbog toga je izraz (5.1.12b) samo približan. Kvantna elektrodinamika koja razmatra i interakciju elektrona sa sopstvenim radijacionim poljem u stanju je da odnos (5.1.12a) kvantitativno dobije.

Odstupanje žiromagnetnog odnosa svakog sistema od orbitnog žiromagnetnog odnosa elektrona izražava se Landeovim g -faktorom (prema francuskom fizičaru Landeu):

$$g_x = \frac{\gamma_x}{\gamma_p}. \quad (5.1.13a)$$

Drugim rečima, g -faktor predstavlja žiromagnetni odnos sistema izražen u γ_p jedinicama.

Za elektron, upoređivanjem izraza (5.1.12a) i (5.1.13a), nalazimo:

$$g_s = 2,0023 \approx 2. \quad (5.1.13b)$$

Uvođenjem g -faktora izrazi izvedeni za orbitne momente, ugaoni i magnetni, mogu da se uopšte i da se primene na svaki sistem, recimo, na slobodni elektron, na atomsko jezgro, itd. Pri tome, svakom paru momenata, ugaonog i magnetnog, pridružuje se odgovarajući g -faktor (spinski, nuklearni, itd.). Tako, zamenom odnosa (5.1.13a) u izraz (5.1.11), dobijamo:

$$\vec{\mu}_s = g_s \gamma_p \vec{s} \quad (5.1.14a)$$

ili zamenom žiromagnetnog odnosa iz (5.1.5):

$$\vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad (5.1.14b)$$

odnosno:

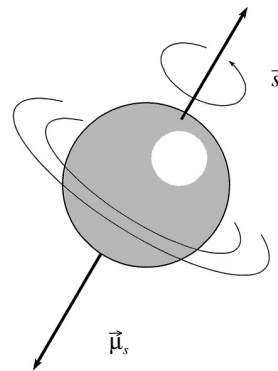
$$\mu_s = -\frac{e\hbar}{2m}. \quad (5.1.14c)$$

Na osnovu izraza (5.1.12b) i (5.1.5) nalazimo da je spinski žiromagnetni odnos elektrona približno jednak njegovom specifičnom naelektrisanju:

$$\gamma_s = -\frac{e}{m} \quad (5.1.15a)$$

$$\gamma_s = -1,7588 \times 10^{11} \text{ Ckg}^{-1}. \quad (5.1.15b)$$

Spinski magnetni i ugaoni moment elektrona odnose se međusobno kao naelektrisanje i masa elektrona, pa je zbog toga njihova veza, kao i njihovo postojanje uopšte, osnovna osobina elektrona. Kao kod orbitnih momenata i spinski magnetni i ugaoni momenti elektrona su antiparalelni, Slika 5.1.2.



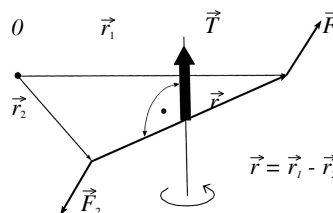
Slika 5.1.2 Spinski ugaoni i magnetni moment elektrona.

5.2 PRECESIJA I ORIJENTACIJA (ORBITNOG I SPINSKOG) MAGNETNOG MOMENTA U MAGNETNOM POLJU

DODATAK 5.2

D-5.2.1 Moment sprega

Spregom sila nazivamo dve jednake sile, paralelne i suprotnog smera, koje ne deluju duž jedne iste prave, Slika D-5.2.1. Moment sprega sile jednak je zbiru momenata svake sile posebno i ne zavisi od tačke u odnosu na koju se momenti sile izračunavaju.



Slika D-5.2.1 Moment sprega javlja se ako paralelne sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 jednakih intenziteta, deluju u suprotnim smerovima, sa napadnim tačkama na rastojanju $|\vec{r}|$ i ako se njihov pravac delovanja ne poklapa sa pravcem vektora \vec{r} .

Na Slici D-5.2.1 momenti sila izračunavaju se u odnosu na proizvoljno izabranu tačku O . Tada je:

$$\vec{T}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \text{i} \quad \vec{T}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2. \quad (\text{D-5.2.1})$$

i:

$$\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2. \quad (\text{D-5.2.2})$$

Iz definicije sprega slede dva uslova:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \text{i} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

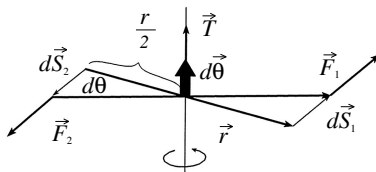
Poslednji uslov očigledan je sa Slike D-5.2.1, sa koje vidimo da vektor \vec{r} kojim se određuje koordinata napadne tačke sile \vec{F}_1 u odnosu na napadnu tačku sile \vec{F}_2 , ne zavisi od izbora tačke u odnosu na koju se računa moment. Unošenjem ova dva uslova u izraz (D-5.2.2), dobijamo:

$$\vec{T} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1. \quad (\text{D-5.2.3})$$

Dakle, moment sprega sila koje deluju na rastojanju \vec{r} jednak je momentu koji nastaje delovanjem samo jedne sile na istom kraku \vec{r} .

D-5.2.2 Rad sprega sila

Moment sprega sila izaziva rotaciju tela pri čemu spreg vrši rad, Slika D-5.2.2. Rad koji izvrši spreg \vec{T} pri rotaciji tela za beskonačno mali ugao $d\vec{\theta}$ izračunavamo preko rada koji izvrše sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 na beskonačno malim putevima $d\vec{s}_1$ i $d\vec{s}_2$. Pri tome je diferencijalni put $d\vec{s}_1$ povezan sa diferencijalnim uglom $d\vec{\theta}$ jednačinom (videti Sliku D-5.2.2):



Slika D-5.2.2 Moment sprega dovodi do rotacije tela oko središnje tačke na $\vec{r}/2$.

$$d\vec{s}_1 = d\vec{\theta} \times \frac{\vec{r}}{2}. \quad (\text{D-5.2.4})$$

Rad $d\vec{A}_1$ koji izvrši sila \vec{F}_1 na putu $d\vec{s}_1$ je:

$$dA_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1$$

a rad koji izvrši druga sila:

$$dA_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 .$$

Ukupni rad sprega jednak je njihovom zbiru:

$$dA = dA_1 + dA_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 .$$

Pošto je $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (po definiciji sprega) i $d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_2$ (putevi su paralelni odgovarajućim silama) iz poslednjeg izraza dobijamo da je:

$$dA = 2\vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1$$

a zamenom iz (D-5.2.4):

$$dA = 2\vec{F}_1 \cdot \left(d\vec{\theta} \times \frac{\vec{r}}{2} \right) = 2d\vec{\theta} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{2} \times \vec{F}_1 \right) = d\vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}_1) .$$

Konačan izraz dobijamo zamenom vektorskog proizvoda jednačinom (D-5.2.3):

$$dA = \vec{T} \cdot d\vec{\theta} . \quad (\text{D-5.2.5})$$

Ako su sile \vec{F} potencijalne, tada je izvršeni rad jednak potencijalnoj energiji:

$$dA = dU .$$

Promena potencijalne energije pri rotaciji za konačni ugao, na primer od θ_1 do θ_2 , dobija se integraljenjem poslednjeg izraza:

$$U_2 - U_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{T} \cdot d\vec{\theta} . \quad (\text{D-5.2.6a})$$

Pošto su vektori \vec{T} i $d\vec{\theta}$ paralelni, izraz (D-5.2.6a) se neposredno prevodi u skalarni oblik ($\vec{T}d\vec{\theta} = Td\theta$). Zamenom apsolutne vrednosti vektora \vec{T} iz jednačine (D-5.2.3) u skalarni oblik izraza (D-5.2.6), dobijamo da je:

$$U_2 - U_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_1 r \sin \theta d\theta \quad (\text{D-5.2.6b})$$

ili posle integraljenja:

$$U_2 - U_1 = -F_1 r (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) .$$

Ugao θ je ugao između vektora \vec{F}_1 i \vec{r} ; za $\theta_1 = \pi/2$ $U_1 = 0$, pa je:

$$U = -F_1 r \cos \theta . \quad (\text{D-5.2.7a})$$

Poslednji izraz predstavlja zavisnost potencijalne energije tela od ugla u odnosu na krak \vec{r} pod kojim deluju potencijalne sile koje obrazuju spreg. Kada sile deluju pod pravim uglom ($\theta = \pi/2$), potencijalna energija jednaka je nuli, a moment sprega je najveći. Kada su sile paralelne kraku \vec{r} ($\theta = 0, \pi$) moment sprega je nula; tada potencijalna energija dostiže krajnje vrednosti – najveću za $\theta = \pi$ i najmanju za $\theta = 0$.

Sistem na koji deluje spreg sila spontanom prelazom u najmanju potencijalnu energiju, usmerava se tako da krak sile \vec{r} postane paralelan pravcu delovanja potencijalnih sila $\theta = 0$.

Izraz (D-5.2.7a), predstavlja skalarni proizvod vektora \vec{F}_1 i \vec{r} , pa sažetije može da se napiše u vektorskom obliku:

$$U = -\vec{F}_1 \cdot \vec{r}. \quad (\text{D-5.2.7b})$$

D-5.2.3 Električni dipol u homogenom električnom polju

Osobine električnog dipola u homogenom električnom polju ovde razmatramo zbog bliske veze sa osobinama magnetnog momenta (magnetnog dipola) u homogenom magnetnom polju.

Električni dipol obrazuju dva naelektrisanja $+q$ i $-q$ razmaknuta na rastojanje $|\vec{r}|$, Slika D-5.2.3. Dipolni moment $\vec{\mu}$ jednak je proizvodu naelektrisanja q i vektora rastojanja \vec{r} :

$$\vec{\mu} = q\vec{r} \quad (\text{D-5.2.8})$$

gde se vektorom \vec{r} određuje položaj pozitivnog naelektrisanja u odnosu na negativno, Slika D-5.2.3.

U električnom polju na naelektrisanja $\pm q$ deluju sile \vec{F}_+ i \vec{F}_- .

$$\vec{F}_{\pm} = \pm q\vec{E} \quad (\text{D-5.2.9})$$

koje su međusobno paralelne, a suprotnog su smera i pošto je polje homogeno, sile su jednakog intenziteta. Zbog toga sile \vec{F}_+ i \vec{F}_- , formiraju spreg čiji je moment, saglasno izrazu (D-5.2.3):

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_+ \quad (\text{D-5.2.10a})$$

Zamenom izraza za silu (D-5.2.9), iz poslednje jednačine dobijamo:

$$\vec{T} = q\vec{r} \times \vec{E} \quad (\text{D-5.2.10b})$$

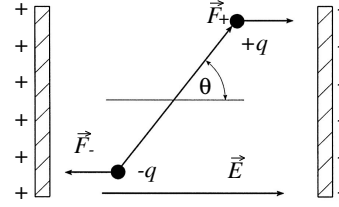
i konačno, s obzirom na definiciju dipolnog momenta (D-5.2.8):

$$\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{E}. \quad (\text{D-5.2.10c})$$

Potencijalnu energiju električnog dipola u homogenom električnom polju dobijamo neposredno iz izraza (D-5.2.7):

$$(\text{D-5.2.7b}) \quad U = -\vec{F}_+ \cdot \vec{r} = -q\vec{E} \cdot \vec{r} = -q\vec{r} \cdot \vec{E} = -\vec{\mu} \cdot \vec{E} \quad (\text{D-5.2.11a})$$

Slika D-5.2.3 Spreg sila koji se javlja kada se dipol unese u homogeno električno polje nastoji da usmeri dipol paralelno primenjenom polju.



ili u skalarnom obliku:

$$U = -\mu E \cos \theta \quad (\text{D-5.2.11b})$$

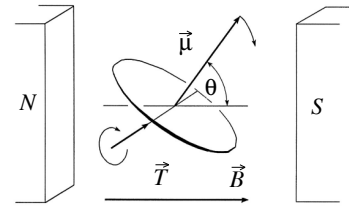
gde je θ ugao koji zaklapa električni dipol sa vektorom električnog polja.

Prema tome, moment sile koji deluje na električni dipol u električnom polju jednak je vektorskom proizvodu dipolnog momenta i vektora električnog polja. Potencijalna energija električnog dipola u homogenom električnom polju jednaka je skalarnom proizvodu dipolnog momenta i vektora električnog polja, sa promenjenim znakom. Otuda sledi da električni dipol ima najmanju energiju kada je usmeren paralelno električnom polju.

D-5.2.4 Strujna kontura u homogenom magnetnom polju ili magnetni dipol u homogenom magnetnom polju

Magnetni moment može da se razmatra kao magnetni dipol, na sličan način kao što je razmatran i električni dipol i njegov moment. Mada je zbog vrtložne prirode magnetnog polja ova sličnost samo prividna, ona je vrlo korisna pošto veliki broj zakonitosti iz elektrostatičke i magnetizma može da se objasni na isti način. U prethodnom odeljku videli smo da se električni dipol u električnom polju spontano usmerava paralelno tom polju. Na isti način, magnetni dipol (magnetni moment) usmerava se paralelno magnetnom polju koje deluje na njega. (Na tom principu radi kompas sa magnetnom iglom.)

Pošto strujna kontura, saglasno izrazu (D-5.1.1), ima magnetni moment, $\vec{\mu}$, to se ona u polju magnetne indukcije, \vec{B} , ponaša slično električnom dipolu u električnom polju, Slika D-5.2.4.



Slika D-5.2.4 Na strujnu konturu u homogenom magnetnom polju deluje moment sprega koji nastoji da magnetni moment $\vec{\mu}$ usmeri paralelno spoljašnjem magnetnom polju \vec{B} .

Dakle, na strujnu konturu u magnetnom polju deluje spreg sila, pa kao i u izrazu (D-5.2.10c) imamo:

$$\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B} = IA\vec{n} \times \vec{B} \quad (\text{D-5.2.12})$$

a slično izrazima (D-5.2.11):

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\text{D-5.2.13a})$$

ili u skalarnom obliku:

$$U = -\mu B \cos \theta. \quad (\text{D-5.2.13b})$$

Za orbitni i spinski magnetni moment moglo bi se očekivati da će se, kao i makroskopske strujne konture, usmeravati u spoljašnjem magnetnom polju. Međutim, interakcija ovih momenata sa spoljašnjim magnetnim poljem znatno je složenija, što je posledica kako kvantne prirode mikroskopskih pojava, tako i činjenice da su ovi magnetni momenti spregnuti sa odgovarajućim ugaonim (mehaničkim) momentima, kako je već opisano u prethodnom poglavlju.

Pri opisivanju dejstva magnetnog polja na magnetne momente atoma poreklo magnetnog momenta ne igra nikakvu ulogu. Fizička slika dobijena za orbitni magnetni moment ista je kao ona koja se dobija za spinski magnetni moment. Jedina razlika javlja se zbog različitih žiromagnetnih odnosa i kvantnih brojeva kojima se izražava kvantovanje. Zbog toga će u nastavku biti reči uglavnom o orbitnom magnetnom momentu. Osobine spinskog magnetnog momenta u magnetnom polju dobijaju se zamenom orbitnog žiromagnetnog odnosa spinskim i orbitnog magnetnog kvantnog broja spinskim magnetnim kvantnim brojem.

5.2.1 Precesija orbitnog magnetnog momenta u magnetnom polju

U homogenom magnetnom polju sa indukcijom \vec{B} , na orbitni magnetni moment $\vec{\mu}_p$, deluje moment sprega sile \vec{M} , koji nastoji da usmeri vektor $\vec{\mu}_p$ paralelno polju \vec{B} :

$$(\text{D-5.2.12}) \quad \vec{M} = \vec{\mu}_p \times \vec{B}. \quad (5.2.1)$$

Magnetni moment imao bi najmanju potencijalnu energiju kada bi bio paralelan polju (videti odeljak D-5.2.4). Pošto je orbitnom magnetnom momentu pridružen orbitni ugaoni moment, \vec{p}_ϕ , magnetni moment neće tek tako da se usmeri duž pravca delovanja polja \vec{B} . Naime, s obzirom na to da je:

$$(\text{D-4.6.5}) \quad \vec{M} = \frac{d\vec{p}_\phi}{dt}$$

i:

$$(5.1.7) \quad \vec{\mu} = \gamma_p \vec{p}_\phi$$

nalazimo da je jednačina kretanja ugaonog momenta \vec{p}_ϕ oblika:

$$\frac{d\vec{p}_\phi}{dt} = \gamma_p \vec{p}_\phi \times \vec{B}. \quad (5.2.2)$$

Dobijena diferencijalna jednačina istog je tipa kao i jednačina (D-2.2.13), pri čemu postoji jednoznačna veza između njihovih veličina:

$$\vec{p}_\phi = \vec{\beta}, \quad \vec{B} = \vec{B}, \quad \gamma_p = k. \quad (5.2.3)$$

Rešenja jednačine kretanja (5.2.2) dobijamo zamenom odnosa (5.2.3) u rešenjima (D-2.2.13), pa je:

$$p_x = |\vec{p}_\phi| \sin \theta \cos(\gamma_p B_z t) \quad (5.2.4a)$$

$$p_y = -|\vec{p}_\phi| \sin \theta \sin(\gamma_p B_z t) = |\vec{p}_\phi| \sin \theta \sin(-\gamma_p B_z t) \quad (5.2.4b)$$

$$p_z = |\vec{p}_\phi| \cos \theta = \text{const.} \quad (5.2.4c)$$

θ je ugao između pravca magnetnog polja (z -ose) i vektora ugaonog momenta. Iz poslednjeg izraza vidi se da se projekcija ugaonog momenta na pravac delovanja magnetnog polja tokom vremena ne menja ($\theta = \text{const.}$). Odatle zaključujemo da magnetni moment u magnetnom polju ne menja smer. Međutim, iz oblika rešenja (5.2.4a,b) (videti odeljak D-2.2.4) zaključujemo da projekcija vektora ugaonog momenta \vec{p}_ϕ na xy -ravan, kruži u toj ravni frekvencijom:

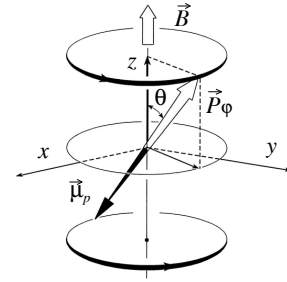
$$\omega_{L,p} = -\gamma_p B_z. \quad (5.2.5a)$$

Slaganjem kretanja projekcija na ose x i y (dakle, u xy -ravni) i projekcije na z -osu, dobijamo sliku o kretanju vektora \vec{p}_ϕ kao celine: vektor \vec{p}_ϕ (znači i vektor $\vec{\mu}_p$) precesuje oko pravca spoljašnjeg magnetnog polja frekvencijom koja je određena izrazom (5.2.5a). Ova frekvencija, $\omega_{L,p}$, naziva se Larmorova frekvencija (otuda indeks L) prema istraživaču koji je prvi razmatrao ovaj problem. S obzirom na to da je žiro-magnetni odnos orbite **negativan**, jednačina (5.1.6), Larmorova frekvencija elektronske orbite je **pozitivna**. To znači da su vektori $\vec{\omega}_{L,p}$ i \vec{B} paralelni, pa je vektorski oblik poslednje jednačine:

$$\vec{\omega}_{L,p} = -\gamma_p \vec{B}. \quad (5.2.5b)$$

Orbitni momenti, ugaoni i magnetni, precesuju oko pravca spoljašnjeg polja u smeru koji je određen pravilom desne ruke, kao što je prikazano na Slici 5.2.1.

Slika 5.2.1 Elektronska orbita uneta u magnetno polje \vec{B} precesuje oko pravca polja stalnom ugaonom brzinom (frekvencijom) $\omega_{L,p}$. Pri tom se projekcija ugaonog momenta na pravac spoljašnjeg magnetnog polja tokom vremena ne menja.



5.2.2 Orijentacija orbitnog momenta u magnetnom polju

Za potpunu sliku kretanja orbitnog magnetnog i orbitnog mehaničkog momenta u spoljašnjem magnetnom polju potrebno je razmotriti i pitanje ugla θ koji

orbitni ugaoni moment zaklapa sa pravcem spoljašnjeg polja. U odeljku 4.6.4 videli smo da orijentacija vektora \vec{p}_φ u prostoru nije proizvoljna, već je određena uslovima prostornog kvantovanja. Kada se u prostoru definiše izvestan pravac (ovde određen spoljašnjim poljem \vec{B}), projekcija ugaonog momenta na taj pravac je kvantovana. To znači da su dozvoljene samo diskretne vrednosti ugla θ koji sa spoljašnjim poljem zaklapa vektor \vec{p}_φ (i vektor $\vec{\mu}_p$). Dozvoljene vrednosti ugla θ određene su odnosom magnetnog kvantnog broja m i azimutalnog kvantnog broja n_φ :

$$(4.6.49) \quad \cos \theta = \frac{m}{n_\varphi}. \quad (5.2.6)$$

Zamenom ovog uslova u izrazu (5.2.4c) dobijamo da je:

$$p_z = |\vec{p}_\varphi| \frac{m}{n_\varphi} \quad (5.2.7)$$

ili s obzirom na izraz:

$$(4.6.38) \quad |\vec{p}_\varphi| = n_\varphi \hbar$$

dobijamo uslov za kvantovanje projekcije ugaonog momenta na pravac spoljašnjeg polja (z-ose):

$$p_z = m\hbar$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_\varphi. \quad (5.2.8)$$

Magnetni moment $\vec{\mu}_p$ koji je pridružen orbitnom ugaonom momentu mora da bude kvantovan na isti način:

$$(5.1.7) \quad \vec{\mu}_p = \gamma_p \vec{p}_\varphi.$$

Projektovanjem vektora $\vec{\mu}_p$ i \vec{p}_φ na z-osu dobijamo:

$$\mu_{p,z} = +\gamma_p p_z \quad (5.2.9a)$$

a zamenom p_z iz jednačine (5.2.8):

$$\mu_{p,z} = m\gamma_p \hbar. \quad (5.2.9b)$$

Najzad, uslov za kvantovanje projekcije orbitnog magnetnog momenta dobijamo uvođenjem Borovog magnetona saglasno jednačini (5.1.9a):

$$\mu_{p,z} = -m\mu_B$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_\varphi. \quad (5.2.10)$$

Pošto vektor $\vec{\mu}_p$ precesuje oko pravca polja \vec{B} , njegove x -komponente, $\vec{\mu}_{p,x}$ u konačnom vremenskom intervalu, uzajamno se poništavaju. Isto važi i za y -komponente, $\vec{\mu}_{p,y}$. To znači da se poprečna (transverzalna) komponenta magnetnog momenta (poprečna u odnosu na spoljašnje polje \vec{B}), $\vec{\mu}_{p,T} = \vec{\mu}_{p,x} + \vec{\mu}_{p,y}$, u konačnom vremenskom intervalu usrednjava na nulu i da zbog toga ne može da se opazi eksperimentalno. Međutim, uzdužna (longitudinalna) komponenta magnetnog momenta, $\vec{\mu}_{p,z}$, za koju smo videli da se ne menja tokom vremena i da ima diskretne vrednosti, može da se eksperimentalno opazi i meri. To neposredno sledi iz izraza za energiju interakcije magnetnog polja i magnetnog momenta:

$$(D-5.2.13) \quad U = -\vec{\mu}_p \cdot \vec{B} = -\mu_p B \cos \theta. \quad (5.2.11a)$$

Imajući na umu da je $\mu_p \cos \theta = \mu_{p,z}$, potencijalnu energiju magnetnog momenta u magnetnom polju možemo da izrazimo kao:

$$U = -\mu_{p,z} B \quad (5.2.11b)$$

ili zamenom $\mu_{p,z}$ iz jednačine (5.2.10):

$$U = m \mu_B B. \quad (5.2.11c)$$

Ovaj izraz predstavlja novi način za izražavanje prostornog kvantovanja i za objašnjavanje kvantnog broja m . Magnetnim kvantnim brojem m kvantuje se energija interakcije orbitnog magnetnog momenta i spoljašnjeg magnetnog polja.

5.2.3 Precesija i orijentacija spinskog magnetnog momenta u spoljašnjem magnetnom polju

Videli smo da se elektronska orbita, zapravo orbitni momenti (mehanički i magnetni) jednovremeno orijentišu pod određenim uglom u odnosu na spoljašnje magnetno polje i precesuju oko njega. Diskretna orijentacija u magnetnom polju posledica je interakcije magnetnog momenta i magnetnog polja i kvantovanja momenta duž pravca magnetnog polja. Precesija momenata posledica je slaganja momenta (sprega) sile (nastalog delovanjem magnetnog polja na magnetni moment) i orbitnog ugaonog momenta.

Zbog bliske analogije između orbitnih i spinskih momenata može se očekivati da će spinski momenti u magnetnom polju da se ponašaju slično orbitnim momentima. Larmorovu frekvenciju spina elektrona dobijamo iz izraza (5.2.5a) ako orbitni zamenimo spinskim žiromagnetnim odnosom:

$$\omega_{L,s} = -\gamma_s B_z \quad (5.2.12a)$$

odnosno, u vektorskom obliku:

$$\vec{\omega}_{L,s} = -\gamma_s \vec{B}. \quad (5.2.12b)$$

Po ugledu na izraz za kvantovanje orbitnog ugaonog momenta, (5.2.8), za spinski ugaoni moment nalazimo:

$$s_z = m_s \hbar, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (5.2.13a)$$

gde je:

$$m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}. \quad (5.2.13b)$$

Prostorno kvantovanje spinskog magnetnog momenta mora da bude isto kao i kvantovanje spinskog ugaonog momenta. S obzirom na njihovu vezu:

$$(5.1.14b) \quad \vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar}$$

nalazimo:

$$\vec{\mu}_s = \gamma_s \vec{s}.$$

Projektovanjem oba spinska momenta, magnetnog, $\vec{\mu}_s$ i mehaničkog, \vec{s} , na z-osu dobijamo:

$$\mu_{s,z} = -g_s \mu_B \frac{s_z}{\hbar} \quad (5.2.14a)$$

a zamenom s_z iz (5.2.13a):

$$\mu_{s,z} = -g_s \mu_B m_s. \quad (5.2.14b)$$

Koristeći i dalje sličnosti, za potencijalnu energiju spinskog magnetnog momenta u magnetnom polju, po ugledu na izraz (5.2.11a), nalazimo:

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \quad (5.2.15a)$$

a prema (5.2.11b):

$$U = -\mu_{s,z} B. \quad (5.2.15b)$$

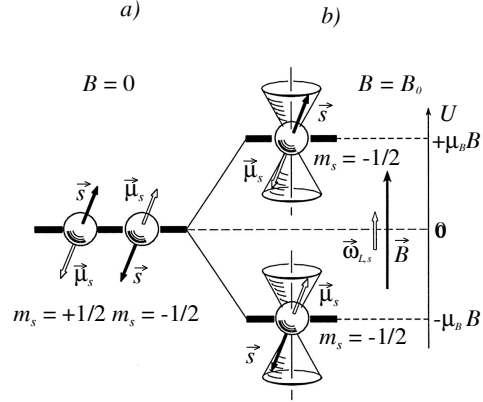
Po ugledu na (5.2.11c), zamenom projekcije magnetnog momenta iz (5.2.14b) sledi:

$$U = +g_s m_s \mu_B B. \quad (5.2.15c)$$

Delovanje magnetnog polja na spinske momente šematski je prikazano na Slici 5.2.2. U magnetnom polju spinski, mehanički i magnetni momenti precesuju sopstvenom Larmorovom frekvencijom koja je, u datom magnetnom polju, g_s puta (približno dva puta) veća od odgovarajuće frekvencije orbitnih momenata. Pri tome, spinski magnetni moment postavlja se u jednu od dve moguće orijentacije koje imaju različite energije određene izrazom (5.2.15c).

Dakle, magnetno polje uklanja degeneraciju i dovodi do cepanja spinskih stanja na dva energijska nivoa. Cepanje je proporcionalno jačini magnetnog polja (tačnije, magnetnoj indukciji). Cepanje energijskih nivoa prouzrokovano je magnetnim međudejstvom (magnetnom interakcijom).

Slika 5.2.2 Precesija i orijentacija spinskih, momenata, ugaonog \vec{s} i magnetnog $\vec{\mu}_s$, u spoljašnjem magnetnom polju \vec{B} : a) u odsustvu magnetnog polja dva spinska stanja $m_s = +1/2$ i $m_s = -1/2$ su degenerisana – bez obzira na orijentaciju njihove energije su jednake. Van magnetnog polja nema precesije; b) magnetno polje uklanja degeneraciju energijskih nivoa – različite orijentacije spina imaju različite potencijalne energije. Kada je spinski magnetni moment „paralelan” polju, $m_s = -1/2$, njegova energija je najmanja, $U = -\mu_B B$, a kada je „anti-paralelan”, $m_s = +1/2$, energija mu je najveća, $U = +\mu_B B$. Zbog kvantovanja projekcije momenta na pravac z-ose, ostale orijentacije nisu dozvoljene. To znači da se u magnetnom polju svako spinsko stanje cepa na dva nivoa. Nezavisno od orijentacije spinski momenti precesuju u istom smeru oko pravca spoljašnjeg magnetnog polja.



5.3 SPIN-ORBITNA INTERAKCIJA

DODATAK 5.3

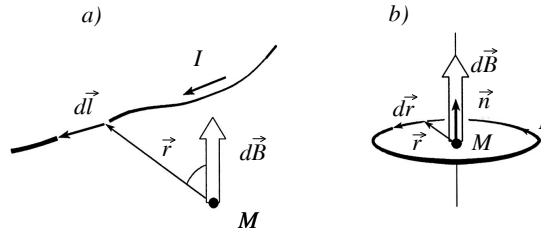
D-5.3.1 Magnetno polje strujne konture (Amper-Laplasov i/ili Bio-Savarov zakon)

Magnetna indukcija $d\vec{B}$ u tački M na rastojanju \vec{r} od elementa strujne konture proizvoljnog oblika $d\vec{l}$, kroz koju protiče struja I , Slika D-5.3.1a, određena je izrazom:

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \vec{r} \times d\frac{\vec{l}}{|\vec{r}|^3} I. \quad (\text{D-5.3.1})$$

To je Amper-Laplasov obrazac ili Bio-Savarov zakon; μ_0 je magnetna propustljivost slobodnog prostora (vakuuma) i iznosi $4\pi \times 10^{-7}$ H/m (Henrija po metru).

Slika D-5.3.1 Uz definiciju Bio-Savarovog zakona: a) komponenta magnetne indukcije $d\vec{B}$ (u proizvoljnoj tački, M , u okolini strujne konture proizvoljnog oblika) koja potiče od elementa strujne konture $d\vec{l}$, normalna je na ravan u kojoj se nalaze vektori \vec{r} i $d\vec{l}$; b) kod zatvorene kružne konture, magnetna indukcija u centru konture proporcionalna je jačini struje, a obrnuto proporcionalna poluprečniku konture. Vektor indukcije je normalan na ravan konture.



Indukcija polja $d\vec{B}$ u centru zatvorene strujne konture poluprečnika \vec{r} , koje potiče od elementa konture $d\vec{r}$ ($d\vec{r} = d\vec{l}$), dobija se iz izraza (D-5.3.1) zamenom odgovarajućih uslova, Slika D-5.3.1b:

$$\begin{aligned}\vec{r} &\perp d\vec{r} \\ \vec{r} \times d\vec{r} &= r dr \vec{n} \\ d\vec{B} &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) I \frac{dr}{r^2} \vec{n}.\end{aligned}\quad (\text{D-5.3.2})$$

Vektor \vec{n} je jedinični vektor normalan na ravan strujne konture. Njegov smer određen je tokom električne struje po pravilu desne ruke. Ukupnu magnetnu indukciju u centru strujne konture dobijamo itegraljenjem poslednjeg izraza po krugu:

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \int I \frac{dr}{r^2} \vec{n}.\quad (\text{D-5.3.3})$$

Pošto je $I = \text{const.}$, $r = \text{const.}$ i $dr = r d\theta$, iz (D-5.3.3) integraljenjem nalazimo:

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{2\pi I}{r} \vec{n}.\quad (\text{D-5.3.4})$$

Prema tome, električna struja I , koja protiče kroz zatvorenu strujnu konturu poluprečnika, r , u njenom središtu indukuje magnetno polje čija je indukcija proporcionalna jačini struje, a obrnuto proporcionalna poluprečniku konture.

U poglavlju 4.6 videli smo da je za empirijsko opisivanje spektara alkalnih metala bilo potrebno da se pretpostavi dubletna priroda p , d , f , itd. elektronskih nivoa, što je opravdano uvođenjem pojma spina. Drugim rečima, bilo je neophodno da se pretpostavi postojanje dva energijska stanja elektrona za datu kombinaciju kvantnih brojeva n , n_ϕ i m .

U svetlu razmatranja izloženog u odeljku 5.2.3, iz kojeg sledi da spoljašnje magnetno polje uklanja degeneraciju spinskih nivoa elektrona, možemo da zaključimo da u elektronskim stanjima p , d , f , ..., itd., ali ne i u stanju s , **postoji unutrašnje, lokalno, magnetno polje atoma**. To nam pruža dobru osnovu za razmatranje fizičke suštine cepanja termova alkalnih metala (zapravo termova svih atoma, samo što se kod alkalnih metala cepanje uočava već na prvi pogled). Problem se svodi na pitanje porekla sopstvenog magnetnog polja atoma i interakcije spinskog magnetnog momenta i tog polja.

5.3.1 Poreklo lokalnog magnetnog polja

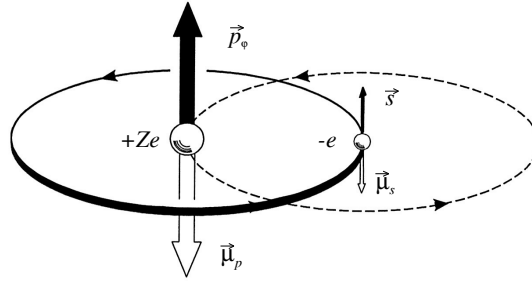
U odeljku 5.1.1 videli smo da elektron koji kruži oko jezgra, dovodi do pojave orbitnog magnetnog momenta $\vec{\mu}_p$, jednačina (5.1.4). Ista pojava može da se opiše na ekvivalentan način preko Bio-Savarovog zakona (videti odeljak D-5.3.1): elektron

koji kruži oko atomskog jezgra, na položaju jezgra indukuje lokalno magnetno polje koje je proporcionalno jačini struje, a obrnuto proporcionalno poluprečniku orbite.

Nas, međutim, zanima postoji li, i koliko je, polje na položaju elektrona, s obzirom na to da ispitujemo uzajamno dejstvo lokalnog magnetnog polja i spina elektrona. Zato ćemo isti proces, kruženja elektrona oko jezgra posmatrati iz drugog ugla, tj. iz sistema u kome elektron miruje. Posmatrano sa položaja elektrona, Slika 5.3.1, izgleda kao da pozitivno naelektrisanog jezgra kruži oko elektrona. (Ovo je donekle slično utisku koju posmatrač sa Zemlje ima pri posmatranju Sunca. Njemu izgleda da Zemlja miruje, a da se Sunce okreće oko Zemlje.) Dakle, iz referentnog sistema elektrona, atomsko jezgro sa naelektrisanjem $+Ze$, kruži oko elektrona koji se nalazi u središtu orbite. (Zamišljamo da je orbita kružna.) Prema Bio-Savarovom zakonu kruženje pozitivnog jezgra oko elektrona na mestu elektrona dovodi do pojave lokalnog magnetnog polja čiju indukciju dobijamo iz Amper-Laplasove jednačine:

$$\vec{B}_e = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2\pi I \vec{n}}{r}. \quad (5.3.1)$$

Slika 5.3.1 Poreklo magnetnog polja na mestu elektrona. Polje nastaje kao posledica kruženja elektrona oko naelektrisanog jezgra. Može da se objasni posmatranjem iste situacije sa mesta elektrona. U sistemu u kojem elektron miruje, jezgro kruži oko elektrona.



Indeksom e kod magnetne indukcije \vec{B}_e označavamo da se magnetna indukcija posmatra iz sistema u kome elektron miruje. Ovde je μ_0 magnetna propustljivost vakuumu, I jačina struje koja nastaje usled „kruženja” jezgra oko elektrona, r poluprečnik orbite i \vec{n} jedinični vektor normalan na ravan „orbite” jezgra, a čiji je smer određen pravilom desne ruke u odnosu na tok struje I .

Jačinu struje koju stvara naelektrisanje $+Ze$, kružeći oko elektrona u orbiti poluprečnika r , kružnom frekvencijom ω , dobijamo iz jednačine za elektronsku orbitnu struju koja je izvedena u odeljku 5.1.1:

$$(5.1.3a) \quad I = -\frac{p_\phi e}{2\pi m r^2}$$

zamenom naelektrisanja elektrona $-e$, naelektrisanjem jezgra $+Ze$:

$$I = +\frac{Zep_\phi}{2\pi m r^2}. \quad (5.3.2)$$

Uvrštavanjem struje iz (5.3.2) u (5.3.1), posle skraćivanja nalazimo:

$$\vec{B}_e = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Ze}{mr^3} p_\phi \vec{n}$$

i zamenuju $p_\phi \vec{n} = \vec{p}_\phi$:

$$\vec{B}_e = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Ze}{mr^3} \vec{p}_\phi. \quad (5.3.3)$$

Poslednji izraz predstavlja magnetnu indukciju lokalnog polja, na mestu elektrona koje je nastalo „kruženjem” jezgra, a viđena iz referentnog sistema u kojem elektron miruje.

Na prvi pogled, može da se učini nevažnim iz kog referentnog sistema se posmatra polje. Međutim, s obzirom na to da magnetna indukcija zavisi od jačine struje, dakle od brzine kretanja naelektrisanja, izbor referentnog sistema iz koga se meri ta brzina veoma je značajan. To znači da je polje \vec{B}_e , posmatrano iz referentnog sistema u kome elektron miruje, različito od tog polja \vec{B}_p posmatranog iz sistema u kome atomsko jezgro miruje. U ovom slučaju, lokalno magnetno polje na mestu elektrona treba da se posmatra iz referentnog sistema u kome jezgro miruje jer je to sistem iz kojeg se atom normalno posmatra i iz kojeg se o atomu dobijaju eksperimentalni podaci.

Tačno izvođenje izraza za pretvaranje polja iz jednog sistema u drugi prilično je složeno i nećemo ga ovde izlagati. Dovoljno je da se kaže da se zbog relativističkog efekta poznatog kao Tomasova precesija, u tom izrazu javlja činilac $1/2$, tzv. Tomasov faktor, tako da se dobija:

$$\vec{B}_p = \frac{1}{2} \vec{B}_e. \quad (5.3.4)$$

Grubo rečeno, Tomasov faktor javlja se zbog toga što referentni sistem u kojem elektron miruje ne samo da rotira oko jezgra nego još rotira i oko elektrona. Pri svakom krugu koji elektron opiše oko jezgra, sistem napravi jedan krug oko elektrona. Zbog toga je prividna frekvencija „kruženja” jezgra, posmatrana iz sistema u kojem elektron miruje, dva puta veća od prave „frekvencije” koja, u stvari, stvara polje. Tomasov faktor ispravlja ovu razliku.

Veličinu magnetne indukcije na mestu elektrona iz referentnog sistema u kome jezgro miruje, nalazimo unošenjem odnosa (5.3.4) u izraz (5.3.3):

$$\vec{B}_p = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Ze}{mr^3} \vec{p}_\phi. \quad (5.3.5)$$

Dakle, lokalno magnetno polje \vec{B}_p , na mestu elektrona koji se kreće u orbiti sa orbitnim ugaonim momentom \vec{p}_ϕ , proporcionalno je naelektrisanju jezgra i ugaonom momentu orbite, a obrnuto proporcionalno trećem stepenu poluprečnika orbite. Polje B_p posledica je relativnog kretanja pozitivno naelektrisanog atomskog jezgra i orbitnog elektrona.

5.3.2 Interakcija spinskog magnetnog momenta i lokalnog magnetnog polja

U odeljku 5.2.3 videli smo da u spoljašnjem magnetnom polju spinski magnetni moment istovremeno precesuje i postavlja se u jednu od dve moguće orijentacije. U lokalnom magnetnom polju, spinski magnetni moment pokazuje iste osobine kao što je to šematski prikazano na Slici 5.3.2. Spinski magnetni moment u lokalnom polju precesuje i orijentiše se „paralelno” ili „antiparalelno” polju.

Energiju interakcije spinskog magnetnog momenta $\vec{\mu}_s$ i lokalnog magnetnog polja \vec{B}_p lako nalazimo uvrštavanjem izraza (5.1.11) u (5.2.15a):

$$(5.2.15a) \quad U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\gamma_s \vec{s} \cdot \vec{B}.$$

Zamenom spoljašnjeg polja \vec{B} lokalnim magnetnim poljem \vec{B}_p , nalazimo energiju spinskog magnetnog momenta u lokalnom polju:

$$U_{p,s} = -\gamma_s \vec{s} \cdot \vec{B}_p. \quad (5.3.6a)$$

Ako u ovaj izraz unesemo spinski žiromagnetni odnos iz (5.1.14a) i lokalno magnetno polje iz (5.3.5), konačno dobijamo:

$$U_{p,s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Ze^2}{m^2 r^3} \vec{p}_\phi \cdot \vec{s}. \quad (5.3.6b)$$

Ova jednačina opisuje energiju magnetne interakcije spinskog magnetnog momenta i lokalnog magnetnog polja. Pošto je lokalno magnetno polje proporcionalno orbitnom ugaonom momentu, a spinski magnetni moment proporcionalan spinskom ugaonom momentu, to se ova interakcija ispoljava kao uzajamno delovanje spinskog ugaonog momenta i orbitnog ugaonog momenta, pa se naziva **spin-orbitna interakcija** ili **spin-orbitna sprege**.

Posebno je pogodno da se jednačina (5.3.6b) napiše u obliku u kome je osnovna interakcija lokalnog magnetnog polja i spinskog magnetnog momenta odvojena od uticaja uslova kvantovanja (koji na energiju međudejstva utiču preko kvantnih brojeva n_ϕ i s):

$$U_{p,s} = a \frac{\vec{p}_\phi \cdot \vec{s}}{\hbar^2}. \quad (5.3.6c)$$

Konstanta a je **konstanta spin-orbitne sprege**. Ona je merilo jačine spin-orbitne interakcije, a brojčano je jednaka energiji spin-orbitne interakcije pri jediničnoj vrednosti odnosa $\vec{p}_\phi \cdot \vec{s} / \hbar^2$. Upoređivanjem izraza (5.3.6b) i (5.3.6c) nalazimo:

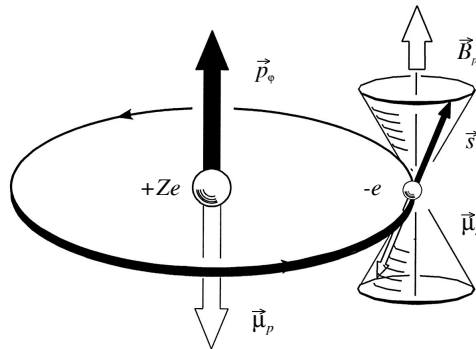
$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Ze^2 \hbar^2}{m^2 r^3}. \quad (5.3.7a)$$

Konstantu a možemo da izrazimo preko električnih veličina zamenom magnetne susceptibilnosti slobodnog prostora (vakuumu) μ_0 električnom ϵ_0 , prema poznatoj (Maksvelovoj) jednačini:

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

gde je c brzina svetlosti u vakuumu. Tada iz (5.3.7a) dobijamo:

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2 \hbar^2}{2m^2 r^3 c^2}. \quad (5.3.7b)$$



Slika 5.3.2 U loklanom magnetnom polju spinski momenti (magnetni i ugaoni) precesuju oko pravca polja; momenti se, takođe, orijentišu. Saglasno pravilima kvantovanja, moguće su dve orijentacije; na slici je prikazana samo „antiparalelna”.

Vidimo da konstanta spin-orbitne interakcije, pored univerzalnih konstanti (e , \hbar , m , c , ϵ_0), zavisi još i od naelektrisanja jezgra Z i poluprečnika orbite r . Uopšteno gledano, poluprečnik orbite nije stalan, pa je za nalaženje konstante a potrebno da se izračuna **srednja vrednost** izraza $1/r^3$. Očigledno je da izračunavanje ove srednje vrednosti zavisi od izabranog modela i jednostavno je samo za Borov model gde je poluprečnik orbite stalan. Korišćenjem Borovog modela izlažemo se opasnosti da jednačinu (5.3.7b), koja je inače **tačna za atome vodonikovog tipa**, učinimo samo približnom. Međutim, jednostavnost izračunavanja u punoj meri nadoknađuje ovaj nedostatak.

Da bismo procenili red veličine konstante spin-orbitne interakcije, kao i njenu zavisnost od naelektrisanja jezgra, glavnog kvantnog broja i sl., izrazićemo je preko drugih atomskih konstanti koristeći Borov model. [Treba da se uoči da i r^3 zavisi od naelektrisanja jezgra, tako da je linearna zavisnost konstante a od rednog broja Z izražena jednačinom (5.3.7b) **samo prividna.**] Dakle, naš cilj je da postojeću kombinaciju univerzalnih konstanti izrazimo preko konstante fine strukture α , energije elektrona u prvoj Borovoj orbiti E_0 , poluprečnika prve Borove orbite r_1 , itd. Za preobražaj izraza (5.3.7b) potrebne su nam jednačine iz Borovog modela kojima se izražava energija elektrona u atomu sličnom vodoniku, u zavisnosti od glavnog kvantnog broja n i od naelektrisanja jezgra $+Ze$, $E_{n,Z}$:

$$(4.2.9) \quad E_{n,Z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \quad (*)$$

$$(P-4.6.4.1) \quad E_{n,Z} = -\frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 \frac{Z^2}{n^2} \quad (**)$$

$$E_{n,z} = E_0 \frac{Z^2}{n^2} \quad (***)$$

i poluprečnik odgovarajuće Borove orbite:

$$(P-4.6.2.1) \quad r_n = \frac{\hbar}{mc\alpha} \frac{1}{Z} n^2. \quad (****)$$

Prvo treba uočiti to da izraz (5.3.7b) sadrži u sebi jednačinu (*), pa zamenom dobijamo:

$$a = -E_{n,z} \frac{\hbar^2}{m^2 c^2 r_n^2} \quad (5.3.7c)$$

a zamenom r_n^2 iz (****) dobija se:

$$a = -E_{n,z} \alpha^2 \frac{Z^4}{n^4}. \quad (5.3.7d)$$

Najzad, unošenjem $E_{n,z}$ iz (**) u izraz (5.3.7d), dobijamo jednačinu kojom se konstanta fine strukture izražava preko drugih atomskih konstanti:

$$a = E_0 \alpha^2 \frac{Z^4}{n^6}. \quad (5.3.7e)$$

Iz dobijene jednačine možemo da izvučemo tri važna zaključka:

1. Konstanta spin-orbitnog sprežanja, kojom se izražava veličina cepanja energijskog nivoa elektrona usled spin-orbitne interakcije, istog je reda veličine (i iste vrste), kao i Zomerfeldova, jednačina (4.6.44a) i Dirakova relativistička popravka, jednačina (4.6.44c). Sva tri izraza proporcionalna su $E_0 \alpha^2 Z^4$.

2. Spin-orbitna interakcija proporcionalna je četvrtom stepenu naelektrisanja jezgra. Zbog toga se njen uticaj teško opaža kod atoma vodonika. Iz istog razloga kod alkalnih metala spin-orbitna interakcija naglo raste sa porastom naelektrisanja jezgra, što se ogleda u progresivnom porastu cepanja dubleta od litijuma do cezija, kao što je pomenuto u odeljku 4.8;

3. Spin-orbitna interakcija opada sa porastom glavnog kvantnog broja, što se ispoljava u smanjenom cepanju energijskih nivoa za velike vrednosti kvantnog broja n , kao što može da se vidi na Slici 4.8.1. U pogledu zavisnosti spin-orbitnog međudejstva od glavnog kvantnog broja, izraz (5.3.7d) je vrlo približan. To je posledica ograničenosti Borovog modela koji ne prepoznaje druge kvantne brojeve osim glavnog kvantnog broja n .

Za dobijanje potpune slike o spin-orbitnoj interakciji potrebno je razmotriti i skalarni proizvod $\vec{p}_\varphi \cdot \vec{s}$ iz izraza (5.3.3b), tj. odnose između vektora \vec{p}_φ i \vec{s} . Pravi oblik ovih zakonitosti ne može se dobiti na osnovu dosadašnjih razmatranja. Naime, odnosi između ovih vektora u velikoj meri zavise od njihove kvantne prirode koju još uvek nismo razmatrali, a koju ćemo detaljno proučiti u sledećem odeljku u vezi sa formulacijom vektorskog modela atoma.

5.4 VEKTORSKI MODEL ATOMA

U dosadašnjim razmatranjima videli smo da Borovim i Bor-Zomerfeldovim modelom vrlo uspešno može da se opiše veliki broj pojava u vezi sa gradom i osobinama atoma. Ponekad smo zapadali i u teškoće ali je ipak zapanjajući broj pojava koje smo mogli kvantitativno da opišemo, počevši od spektara atoma vodonika i atoma sličnih vodoniku (tačnije jona), pa do orbitnog magnetizma atoma. Ključna osobina ovih poluklasičnih modela jeste da pružaju intuitivnu sliku o građi atoma i o pojavama u vezi sa njom. Pokazalo se, međutim, da baš taj aspekt Borovog i Bor-Zomerfeldovog modela (prikazivanje detaljne intuitivne slike) ponekad predstavlja smetnju za ispravno razumevanje pojava. Na primer, razmatrajući spin-orbitno međudejstvo pomoću Borovog modela, dobili smo jasnu predstavu o poreklu tog međudejstva i o suštini pojave dubletne strukture energijskih nivoa. Po istom modelu bilo je lako zamisliti i precesiju elektrona u lokalnom polju orbitnog momenta, kao što je šematski prikazao na Slici 5.3.2. Međutim, koristeći isti model vrlo je teško zamisliti i razumeti obrnutu situaciju po kojoj spin-orbitna interakcija može da se smatra delovanjem lokalnog polja elektronskog spina na orbitni magnetni moment. Tada orbitni magnetni moment treba da precesuje u spinskom lokalnom magnetnom polju! Ovako, „obrnuto” razmatranje mora biti ispravno, s obzirom na nepromenljivost (invarijantnost) izraza (5.3.3) pri permutaciji orbitnog i spinskog ugaonog momenta. U stvarnosti, kao što ćemo videti u odeljku 5.4.2 i spinski i orbitni momenti, zbog spin-orbitnog međudejstva, jednovremeno precesuju oko njihove rezultante.

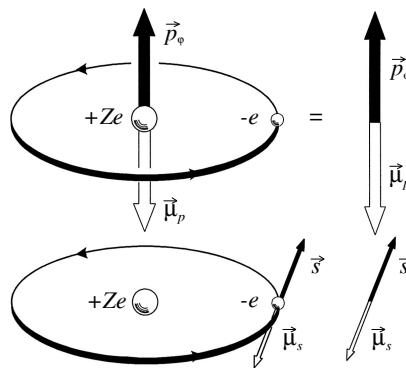
Fizička slika o ovoj interakciji, zapravo ekvivalencija spinskih i orbitnih momenata pri njihovom uzajamnom delovanju, bila bi mnogo jasnija kada bismo umesto orbita, atomskog jezgra, rotacije elektrona oko sopstvene ose i ostalih vizuelnih sredstava, model atoma sveli smo na ključne elemente. Dakle, za opis spin-orbitnog međudejstva, dovoljno je da se elektronska orbita predstavi pomoću spregnutih vektora orbitnog ugaonog i orbitnog magnetnog momenta, a elektron pomoću spregnutih vektora spinskog ugaonog i spinskog magnetnog momenta, Slika 5.4.1. Kada je problem sveden na uzajamno delovanje para spregnutih vektora, sasvim je svejedno da li posmatramo uticaj magnetnog polja orbitnog momenta, \vec{B}_p , na spinski magnetni moment, $\vec{\mu}_s$, ili dejstvo magnetnog polja spinskog momenta \vec{B}_s , na orbitni magnetni moment, $\vec{\mu}_p$. Simetrija je očigledna i, kao što ćemo pokazati u odeljku 5.4.2, nije teško zamisliti precesiju vektora \vec{p}_ϕ i \vec{s} oko rezultujućeg ugaonog momenta.

Normalno, pored spin-orbitnog uzajamnog dejstva postoji i niz drugih pojava koje se mnogo lakše opisuju svodenjem na interakciju reprezentativnih vektora nego intuitivnom slikom nekog od poluklasičnih modela. Tako smo od intuitivne slike o strukturi atoma prešli na formalnu, odnosno od poluklasičnog modela na **vektorski model atoma**.

Osnovna prednost **vektorskog modela** nad poluklasičnim jeste što se u njemu radi sa veličinama koje mogu da se, posredno ili neposredno, mere i što daje vrlo jasnu sliku o njihovim međusobnim odnosima koristeći uobičajeni aparat vektorske algebre. Kod Borovog modela, na primer, često koristimo poluprečnik elektronske orbite, mada je to veličina koja eksperimentalno ne može da se odredi i koja, kao što ćemo kasnije videti, u suštini nema ni fizičkog smisla. Vektorski model pokazao se naročito korisnim u atomskoj spektroskopiji, gde uz njegovu pomoć ogromno mnoštvo eksperimentalnih podataka može da se lako razvrsta i sistematizuje.

Druga prednost vektorskog modela, s obzirom na to da je on lišen stvaranja bilo kakve slike o stvarnim odnosima između elemenata atoma (na primer, da li elektron obilazi jezgro po kružnim ili eliptičkim orbitama), jeste njegova prilagodljivost pravilima i zakonitostima koje nisu jasne i očigledne na prvi pogled. Na primer, kao što je više puta pominjano, orbitni momenti, ugaoni i magnetni, u s -orbiti moraju da budu jednaki nuli da bi se objasnila dubletna struktura spektara alkalnih metala. Takav (eksperimentalni!) nalaz potpuno protivreči poluklasičnim modelima. Međutim, vektorski model se uopšte ne bavi poreklom orbitnih momenata i činjenica da u nekim stanjima neki vektori imaju intenzitet jednak nuli uopšte ne remeti unutrašnji sklad modela.

Slika 5.4.1 Vektorski model atoma: prikaz atoma svodi se na zamenu svih njegovih elemenata odgovarajućim vektorima. Na primer, kruženje naelektrisanja i mase elektrona oko jezgra predstavlja se, umesto orbitama, vektorima orbitnog ugaonog i orbitnog magnetnog momenta. Na isti način elektronski spin predstavlja se spregnutim vektorima spinskog ugaonog i spinskog magnetnog momenta.



Zbog toga je vektorski model zgodan za uvođenje nekih pravila koja ne mogu da se razumeju intuitivno, a koja proističu iz kvantne teorije. Matematički i fizički postupci iz kojih proističu ta pravila mogu da budu vrlo složeni i prevazilaze obim i svrhu ove knjige. Međutim, njihovo *ad hoc* uvođenje pruža mogućnost za kvantitativno opisivanje novih pojava i za ponovno tumačenje nekih pojava koje su razmatrane u okviru poluklasičnih modela, a koje su, s obzirom na ograničenja modela, izvedene samo kvalitativno. Na primer, kod spin-orbitnog međudejstva član $\vec{p}_\phi \cdot \vec{s}$ u izrazima (5.3.3) razmotren u okviru poluklasične slike, daje rezultate koji se razlikuju od eksperimentalnih nalaza na vrlo očigledan način. Međutim, pomoću pravila za slaganje momenata, koja ćemo definisati u sledećem odeljku, može da se kvantitativno predvidi ishod eksperimenata u kojima spin-orbitna interakcija ima značajnu ulogu.

5.4.1 Elementi vektorskog modela: vektori ugaonog i magnetnog momenta

U ovom odeljku opisaćemo osnovne osobine vektora ugaonog i magnetnog momenta koje su izvedene iz kvantne teorije. Mnoge od osobina intuitivno su jasne jer potiču iz vektorske algebre. Osobine koje nisu jasne (kvantovanje momenata i projektovanje momenata na izabrani pravac) ne mogu da se objasne pomoćnom slikom izvedenom iz makrosveta. Pravu predstavu o tim osobinama steći ćemo u okviru Šredingerovog modela atoma, 9. poglavlje, i Hajzenbergove relacije neodređenosti, odeljak 8.3.

Osnovni elementi vektorskog modela atoma su vektori ugaonih momenata, orbitni i spinski i odgovarajući vektori magnetnih momenata (takođe orbitni i spinski).

Zbog opšte prirode veze između ugaonog i njemu pridruženog magnetnog momenta, koja je izražena jednačinama (5.1.7) i (5.1.12), magnetni vektori mogu da se izraze preko ugaonih \vec{l} , vrlo često, i ne pominju se izričito. To smo mogli da vidimo kod spin-orbitne interakcije, koja je po fizičkoj suštini **magnetna**, a koja se u konačnom obliku izražava kao interakcija spinskog i orbitnog **ugaonog** momenta.

Orbitni ugaoni moment \vec{l}

Orbitni ugaoni moment \vec{l} odgovara orbitnom ugaonom momentu \vec{p}_ϕ koji smo odredili u Bor-Zomerfeldovoj teoriji. To znači da u svim do sada izvedenim jednačinama vektor \vec{p}_ϕ može da se zameni vektorom \vec{l} . Međutim, mala ali značajna razlika javlja se kod njihovog kvantovanja, što je i glavni razlog za uvođenje novog simbola \vec{l} . Dakle, orbitni ugaoni moment kvantuje se orbitnim kvantnim brojem l :

$$\vec{l} = \sqrt{l(l+1)} \hbar \vec{l}^\circ \quad (5.4.1a)$$

\vec{l}° je jedinični vektor čijim je smerom određen smer vektora ugaonog momenta. Isti izraz u skalarnom obliku je:

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (5.4.1b)$$

$$|\vec{l}|^2 = l(l+1) \hbar^2 \quad (5.4.1c)$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Kao i ranije, n je glavni kvantni broj.

Projekcija orbitnog ugaonog momenta na proizvoljno izabranu osu (recimo, z -osu) l_z , kvantuje se na isti način kao i $p_{\phi,z}$, jednačina (4.6.50):

$$l_z = m_l \hbar \quad (5.4.2a)$$

$$m_l = -l, (-l+1), \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l. \quad (5.4.2b)$$

Magnetni (orbitni) kvantni broj m_l dobio je ovde u indeksu l , da bi se naznačilo da se odnosi na orbitne momente. Isti je kao i odgovarajući kvantni broj u Bor-Zomerfeldovoj teoriji.

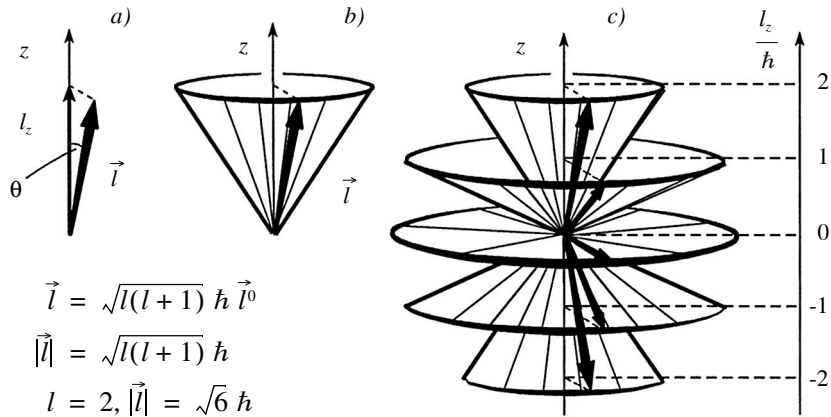
Važna osobina svih ugaonih momenata u vezi sa prostornim kvantovanjem posledica je Hajzenbergove relacije neodređenosti, odeljak 8.3: **Ukoliko je projekcija vektora ugaonog momenta na proizvoljno izabran pravac poznata, tada, u principu, ne može da bude poznata njegova projekcija na neki drugi pravac.** Drugim rečima, ne može da bude poznata (merljiva!) projekcija vektora ugaonog momenta na dva pravca istovremeno. Ova osobina ima izvanredno veliki značaj i prodire duboko u kvantnu prirodu atomskih objekata. U okviru vektorskog modela lako se daje njeno geometrijsko tumačenje.

Odnos projekcije vektora i njegovog intenziteta nalazimo iz jednačina (5.4.1a) i (5.4.2a):

$$\cos \theta = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (5.4.3)$$

Vidimo da je za navedene kvantne brojeve (tj., za posmatrano stanje) taj odnos stalan, što znači da je i ugao θ koji vektor \vec{l} zaklapa sa izabranom osom stalan. Nemoćnost merenja projekcije u drugim pravcima, kada je poznata jedna projekcija, ukazuje na to da ugao koji vektor momenta zaklapa sa bilo kojim drugim pravcem nije određen. Geometrijski, to znači da se vektor \vec{l} nalazi negde na površini kupe koja je opisana oko odabranog pravca duž kojeg je projekcija poznata, Slika 5.4.2b. To što je vektor na površini kupe ne znači da vektor precesuje, već samo da je to način da se najbliže odredi njegov pravac u prostoru. Do precesije oko odabranog pravca dolazi tek kada se vektor nađe u magnetnom polju. Iz jednačine (5.2.5) očigledno je da je u odsustvu magnetnog polja precesiona frekvencija jednaka nuli. **Bez magnetnog polja nema precesije.** Prema tome, za određenu vrednost kvantnog broja m_l vektor ugaonog momenta nalazi se negde na površini kupe koja je određena proizvoljno izabranom osom duž koje tražimo projekciju i veličinom same projekcije, koja je izražena jednačinom (5.4.2a).

Ranije smo videli, a iz jednačine (5.4.2b) to je očigledno, da kvantno stanje određeno orbitnim kvantnim brojem l može da se ostvari na $(2l+1)$ načina. Pošto su u odsustvu polja sva ta stanja degenerisana, tj. u odsustvu magnetnog polja sva imaju istu energiju, vektor ugaonog momenta \vec{l} može da ima $(2l+1)$ različitih projekcija. U svakoj od njih on je lokalizovan na površini odgovarajuće kupe. Pošto su energije različitih stanja koja odgovaraju različitim kupama **u odsustvu magnetnog polja međusobno jednake**, to vektor ugaonog momenta ravnopravno i podjednako verovatno može da se nađe na površini svake od tih kupa. Zato celokupan prostor u kojem može da se nađe vektor ugaonog momenta, u odsustvu magnetnog polja, predstavlja skup površina $(2l+1)$ kupa, kao što je prikazano na Slici 5.4.2c.



Slika 5.4.2 Orbitni ugaoni moment \vec{l} i njegovo prostorno kvantovanje: a) orbitni ugaoni moment predstavljamo vektorom čiji intenzitet zavisi od orbitnog kvantnog broja (5.4.1a). U odsustvu spoljašnjeg polja možemo da izaberemo proizvoljni pravac, recimo pod uglom θ u odnosu na vektor momenta, duž kojeg moment ima projekciju koja je izražena jednačinom (5.4.2a); b) pošto vektor ugaonog momenta može da ima projekciju određenu samo duž jednog pravca, to se u stanju određenom kvantnim brojem m on nalazi na površini kupe čija se osa poklapa sa odabranim pravcem (ovde označenim kao z-osa). Ugao kupe zavisi od kvantnih brojeva prema izazu (5.4.3); c) za kvantni broj l postoji $(2l+1)$ stanja sa različitim kvantnim brojem m . Pošto su, u odsustvu polja energije tih stanja jednake, dakle, stanja su degenerisana, vektor ugaonog momenta sa podjednakom verovatnoćom može da se nađe na površini bilo koje kupe. U odsustvu polja ugaoni moment ne precesuje!

Sa Slike [i iz jednačine (5.4.3)] se, takođe, vidi da je projekcija vektora na odabranu osu uvek manja od njegovog intenziteta $l_z < |\vec{l}|$. To znači da vektor ugaonog momenta **ne može** da bude paralelan sa osom na koju se projektuje. Za vektor u magnetnom polju [tada vektor projektujemo na pravac polja jer je energija u polju određena upravo tom projekcijom, jednačinom (5.2.11b)], zaključujemo da ne može da bude paralelan polju, što je jedan od bitnih uslova za objašnjenje precesije.

Spinski ugaoni moment \vec{s}

Spinski ugaoni moment \vec{s} ima iste opšte osobine kao i orbitni ugaoni moment \vec{l} , s tom razlikom što je kvantovan spinskim kvantnim brojem s koji ima stalnu vrednost $\frac{1}{2}$:

$$\vec{s} = \sqrt{s(s+1)}\hbar \vec{s}^0 \quad (5.4.4a)$$

\vec{s}^0 je jedinični vektor čiji smer određuje smer vektora ugaonog momenta. U skalarnom obliku:

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (5.4.4b)$$

$$|\vec{s}|^2 = s(s+1)\hbar^2 \quad (5.4.4c)$$

$$s = \frac{1}{2}. \quad (5.4.4d)$$

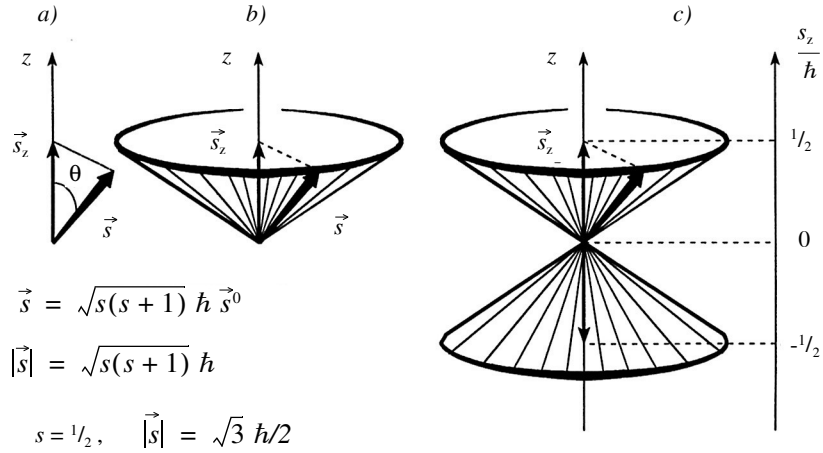
I prostorno kvantovanje spinskog ugaonog momenta može da se opiše na isti način kao i kod orbitnog momenta, s tim što je broj mogućih stanja ograničen veličinom spinskog kvantnog broja:

$$(5.2.13a) \quad s_z = m_s \hbar \quad (5.4.5a)$$

$$(5.2.13b) \quad m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}. \quad (5.4.5b)$$

Saglasno ranije pomenutom pravilu (odjeljak 4.8), stanja sa različitim vrednostima kvantnog broja m_s mogu da se ostvare na $2s+1$ načina. Za $s = \frac{1}{2}$ dobijamo da su moguća samo dva **stanja**. Isti zaključak, očigledno, sledi iz izraza (5.4.5b). U odsustvu magnetnog polja ova stanja imaju iste energije, dakle, dvostruko su degenerisana.

Relativni odnosi između različitih stanja i projekcija spinskog ugaonog momenta prikazani su na Slici 5.4.3. Svi detalji izneti u vezi s orbitnim ugaonim momentom odnose se i na spinski ugaoni moment, imajući u vidu razlike u veličinama kvantnih brojeva. Zapravo, razmatranja izneti u vezi s orbitnim ugaonim momentom odnose se na svaki ugaoni moment (ukupni ugaoni moment, nuklearni ugaoni moment, itd.) uzimajući u obzir razlike u veličini i rasponu odgovarajućih kvantnih brojeva. To predstavlja jednu od važnih, ranije pomenutih, osobina vektorskog modela: određena fizička veličina predstavlja se reprezentativnim vektorom. Bez obzira na poreklo, vektori određene fizičke veličine imaju iste opšte osobine.



Slika 5.4.3 Spinski ugaoni moment \vec{s} i njegovo prostorno kvantovanje: a) spinski ugaoni moment predstavljamo vektorom čiji intenzitet zavisi od spinskog kvantnog broja (5.4.4a). U odsustvu spoljašnjeg polja možemo da izaberemo proizvoljni pravac, recimo pod uglom θ u odnosu na vektor momenta, duž kojeg moment ima projekciju koja je izražena jednačinom (5.4.5a); b) vektor ugaonog momenta može da ima projekciju određenu samo duž jednog pravca. Zato se u stanju određenom kvantnim brojem m_s on nalazi na površini kupe koja je opisana oko odabranog pravca (ovde z-osa); c) pošto je $m_s = \pm 1/2$ postoje samo dva moguća stanja čije su energije, u odsustvu magnetnog polja, jednake. Dakle, stanja su degenerisana i vektor spinskog ugaonog momenta može sa podjednakom verovatnoćom da se nađe na površini bilo koje kupe. U odsustvu polja spinski ugaoni moment ne precesuje!

Orbitni magnetni moment $\vec{\mu}_l$

Mala promena u kvantovanju orbitnog ugaonog momenta pri prelasku od poluklasičnog momenta \vec{p}_ϕ na kvantnomehantički \vec{l} , na sličan način preobražava poluklasični magnetni moment $\vec{\mu}_p$ u kvantnomehantički $\vec{\mu}_l$. Svi odnosi u vezi s orbitnim magnetnim momentom izraženi vektorski, u poluklasičnom modelu, u potpunosti su zadržani i u kvantnomehantičkoj slici. Iz originalne definicije uzajamnog odnosa orbitnog magnetnog i orbitnog ugaonog momenta, jednačina (5.1.10a) dobijamo:

$$\vec{\mu}_l = -\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar}. \quad (5.4.6a)$$

Da bi se očuvala sličnost orbitnog sa spinskim (i ukupnim) magnetnim momentom, ova jednačina se piše i u sledećem obliku:

$$\vec{\mu}_l = -g_l \mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar} \quad (5.4.6b)$$

pri čemu je očigledno:

$$g_l = 1. \quad (5.4.6c)$$

Zamenom vektora \vec{l} iz (5.4.1a), nalazimo:

$$\vec{\mu}_l = -g_l \mu_B \sqrt{l(l+1)} \vec{l}^0. \quad (5.4.6d)$$

\vec{l}^0 je jedinični vektor u smeru orbitnog ugaonog momenta. Znak '-' pokazuje da su vektori \vec{l} i $\vec{\mu}_l$ antiparalelni. U skalarnom obliku je:

$$|\vec{\mu}_l| = +g_l \mu_B \sqrt{l(l+1)}. \quad (5.4.6e)$$

Projekciju magnetnog momenta na proizvoljnu osu nalazimo kao i ranije. Iz jednačine (5.2.10) sledi da je:

$$\mu_{l,z} = -m_l \mu_B. \quad (5.4.7)$$

Mada je izraz (5.2.10) izveden za magnetni moment u magnetnom polju, uklanjanje polja ne menja uslove kvantovanja već menja samo energiju stanja i precesionu frekvenciju. Van polja, stanja sa različitim kvantnim brojevima m_l su degenerisana. Van polja nema precesije.

Iz izraza (5.4.6a) očigledno je da se $\vec{\mu}_l$ razlikuje od \vec{l} samo za skalarnu konstantu, što znači da **u odsustvu magnetnog polja** vektor $\vec{\mu}_l$ ima sve osobine kao i vektor \vec{l} . To se odnosi kako na kvantovanje tako i na projektovanje, degeneraciju stanja, itd. Suštinska razlika između vektora $\vec{\mu}_l$ i \vec{l} javlja se tek pri pojavi magnetnog polja. Magnetno polje deluje na orbitni ugaoni moment **samo preko njemu pridruženog** magnetnog momenta. Međutim, i tada, zbog neraskidive veze između ugaonog i magnetnog momenta, koja je izražena jednačinom (5.4.6a), formalna jednakost ostaje potpuno očuvana.

Spinski magnetni moment $\vec{\mu}_s$

U odeljku 5.1.2 videli smo da između spinskog, magnetnog i spinskog ugaonog momenta, postoji odnos:

$$(5.1.14b) \quad \vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad (5.4.8a)$$

gde je g_s elektronski g-faktor, a μ_B Borov magnetom. Zamenom spinskog ugaonog momenta iz (5.4.4a), dobijamo:

$$\vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \sqrt{s(s+1)} \vec{s}^0 \quad (5.4.8b)$$

ili u skalarnom obliku:

$$|\vec{\mu}_s| = -g_s \mu_B \sqrt{s(s+1)}. \quad (5.4.8c)$$

Projekcija spinskog magnetnog momenta na pravac delovanja polja, koju smo našli u odeljku 5.2.3, ista je kao i projekcija na proizvoljno izabrani pravac:

$$(5.2.14b) \quad \mu_{s,z} = -g_s m_s \mu_B. \quad (5.4.9)$$

Odnos između spinskih momenata isti je kao i između orbitnih momenata, pa sve osobine spinskog magnetnog momenta mogu da se dobiju na isti način kao i kod orbitnog magnetnog momenta.

5.4.2 Mehanizam sprežanja momenta

Pitanje međudejstva ugaonih i magnetnih momenata predstavlja ključni problem vektorskog modela atoma. Kao što smo videli u prethodnom odeljku, gledano po fizičkoj suštini, postoje dve vrste momenata – ugaoni (spinski i orbitni) i magnetni (opet spinski i orbitni). Ugaoni (mehanički) momenti, osim veoma slabog gravitacionog polja koje potiče od mase koja je pridružena momentu, nemaju drugu mogućnost za međudejstva sa okolinom. Drugim rečima, ne postoji mehanizam za neposrednu interakciju ugaonih momenata sa okolinom i sa drugim momentima.

S druge strane, oko svakog magnetnog dipola (magnetnog momenta) postoji magnetno polje koje može da deluje na druge magnetne momente. Ovo delovanje detaljno smo razmatrali u okviru spin-orbitnog međudejstva, odeljak 5.3. Pošto je svakom magnetnom pridružen i odgovarajući ugaoni moment, to se neposredno međudejstvo magnetnih momenata prenosi i na ugaone momente. Magnetno dipol-dipol međudejstvo, koje je detaljno izloženo u odeljku 5.3, ovde će biti svedeno na formalnu sliku koja odgovara potrebama vektorskog modela.

Posmatrajmo jednoelektronski atom (atom sličan vodoniku) čiji se elektron nalazi u orbiti koja ima ugaoni moment $l > 0$. Međusobno delovanje magnetnih momenata, spinskog i orbitnog, može da se shvati kao međudejstvo spinskog magnetnog momenta i orbitnog magnetnog polja ili kao međudejstvo orbitnog magnetnog momenta i spinskog magnetnog polja.

Međudejstvo spinskog magnetnog momenta $\vec{\mu}_s$ i lokalnog magnetnog polja \vec{B}_l (koje potiče od orbitnog kretanja elektrona) iste je vrste kao i međudejstvo sa spoljašnjim magnetnim poljem koje smo razmatrali u odeljku 5.2. Jednačina kretanja, po ugledu na izraz (5.2.2), je:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \gamma_s \vec{s} \times \vec{B}_l. \quad (5.4.10)$$

Isto tako, međudejstvo orbitnog magnetnog momenta $\vec{\mu}_l$ i lokalnog magnetnog polja \vec{B}_s (koje potiče od spinskog magnetnog momenta) izražava se odgovarajućom jednačinom kretanja:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \gamma_l \vec{l} \times \vec{B}_s. \quad (5.4.11)$$

Jednačine (5.4.10) i (5.4.11) ne mogu tako jednostavno da se integrale kao (5.2.2) jer magnetna polja koja se pojavljuju u njima \vec{B}_l i \vec{B}_s **nisu stalna**. Magnetna polja su promenljiva jer slede odgovarajuće magnetne momente koji su u pokretu, a čije kretanje upravo izražavaju jednačine (5.4.10) i (5.4.11).

Lokalno magnetno polje, pored veličine momenta od kojeg potiče, zavisi i od lokalne geometrije, dakle, od uzajamnog položaja tačke u kojoj se polje meri i magnetnog dipola koji je izvor polja:

$$\vec{B}_l = k_l(x_s, y_s, z_s) \vec{\mu}_l. \quad (5.4.12a)$$

Indeks l kod funkcije k označava njenu zavisnost od momenta koji je izvor polja, a indeks s u koordinatama pokazuje to da se koordinate traže na položaju momenta na koji polje deluje. Magnetni moment iz poslednje jednačine može pomoću odnosa (5.1.7) da se izrazi preko orbitnog ugaonog momenta:

$$\vec{B}_l = k_l(x_s, y_s, z_s) \gamma_l \vec{l}. \quad (5.4.12b)$$

Isto važi i za lokalno magnetno polje spinskog magnetnog momenta:

$$\vec{B}_s = k_s(x_l, y_l, z_l) \vec{\mu}_s \quad (5.4.13a)$$

i s obzirom na vezu između spinskog magnetnog i ugaonog momenta:

$$(5.1.12) \quad \vec{B}_s = k_s(x_l, y_l, z_l) \gamma_s \vec{s}. \quad (5.4.13b)$$

Funkcija k ne menja vrednost kada indeksi s i l zamene svoja mesta. Ovo je razumljivo jer se spinski i orbitni magnetni momenti pri njihovom uzajamnom delovanju ponašaju na isti način, a njihovi uzajamni položaji su simetrični. Drugim rečima, energija međudejstva orbitnog magnetnog polja \vec{B}_l i spinskog magnetnog momenta $\vec{\mu}_s$, ista je kao i energija međudejstva spinskog magnetnog polja \vec{B}_s i orbitnog magnetnog momentu $\vec{\mu}_l$:

$$-\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B}_s$$

odakle sledi:

$$k_l(x_s, y_s, z_s) = k_s(x_l, y_l, z_l) = K.$$

Uzmemo li u obzir poslednji uslov, zamenom izraza za lokalna polja \vec{B}_l iz (5.4.12b) i \vec{B}_s iz (5.4.13b) u odgovarajuće jednačine kretanja (5.4.10) i (5.4.11) dobijamo:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \gamma_s \gamma_l K \vec{s} \times \vec{l} \quad (5.4.14a)$$

i:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \gamma_s \gamma_l K \vec{l} \times \vec{s}. \quad (5.4.14b)$$

Jednačine (5.4.14) formalno pokazuju da su ugaoni orbitni i ugaoni spinski moment uzajamno spregnuti. Činjenica da je sprežanje **magnetne** prirode ogleda se u zavisnosti od žiromagnetnih odnosa. Rešenje sistema diferencijalnih jednačina (5.4.14) može da se dobije i bez integraljenja, jednostavnim transformacijama. Sabiranjem izraza (5.4.14a) i (5.4.14b) dobijamo:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} + \frac{d\vec{l}}{dt} = \gamma_s \gamma_l K (\vec{s} \times \vec{l} + \vec{l} \times \vec{s})$$

odnosno:

$$\frac{d(\vec{s} + \vec{l})}{dt} = \gamma_s \gamma_l K (\vec{s} \times \vec{l} - \vec{s} \times \vec{l}).$$

Dakle, nalazimo da je:

$$\frac{d(\vec{s} + \vec{l})}{dt} = 0 \quad (5.4.15)$$

odakle je, očigledno:

$$\vec{l} + \vec{s} = \text{const}. \quad (5.4.16a)$$

Iz dobijenog izraza vidimo da, mada su vektori \vec{l} i \vec{s} u kretanju, njihov zbir ostaje stalan. Drugim rečima, **kada su vektori orbitnog i spinskog momenta spregnuti, njihov zbir je konstanta kretanja**. Zbir ugaonih momenata naziva se ukupni ugaoni moment \vec{j} :

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}. \quad (5.4.16b)$$

Normalno, ukupni ugaoni moment može da se odredi u svakoj prilici, ali, konstanta kretanja je samo kada su vektori spregnuti.

Pošto se, saglasno jednačini (5.4.16b), zbir ugaonih momenata tokom vremena ne menja, to znači da se obe komponente \vec{l} i \vec{s} kreću usaglašeno i to tako da njihov međusobni ugao tokom vremena ostaje stalan. Zbog toga je za bliže određivanje prirode njihovog kretanja, dovoljno da se razmotri kretanje samo jedne komponente.

Jednačinu kretanja spinskog ugaonog momenta, izraz (5.4.14a), ne možemo da integralimo prema postupku iz odeljka D-2.2.4 zbog toga što vektor \vec{l} nije stalan. Međutim, ako se prisetimo da je vektorski proizvod paralelnih vektora jednak nuli,

$\vec{s} \times \vec{s} = 0$, desnu stranu vektorskog proizvoda u (5.4.14a) možemo da proširimo sa \vec{s} , pa dobijamo:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \gamma_s \gamma_l K \vec{s} \times (\vec{l} + \vec{s}) \quad (5.4.17a)$$

a s obzirom na izraz (5.4.16b):

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \gamma_s \gamma_l K \vec{s} \times \vec{j}. \quad (5.4.17b)$$

Vektor ukupnog ugaonog momenta \vec{j} ne menja se tokom vremena, jednačine (5.4.16), pa dobijeni izraz (5.4.17b) može da se integriše prema postupku koji je iznet u D-2.2.4. I bez traženja rešenja, iz oblika jednačine (5.4.17b) zaključujemo da vektor \vec{s} precesuje oko vektora \vec{j} . S obzirom na to da je \vec{s} komponenta vektora \vec{j} (koji je stalan), zaključujemo da i druga komponenta, vektor \vec{l} , takode precesuje oko vektora \vec{j} i to istom precesionom frekvencijom.

Dakle, usled spin-orbitnog međudejstva, koje je po svojoj fizičkoj suštini **magnetno**, vektori orbitnog i spinskog ugaonog momenta \vec{l} i \vec{s} , precesuju oko svog vektorskog zbira \vec{j} , koji predstavlja ukupni ugaoni moment sistema i koji je konstanta kretanja spregnutih vektora.

5.4.3 Ukupni ugaoni moment

Ukupni ugaoni moment za koji smo u prethodnom odeljku videli da predstavlja konstantu kretanja **spregnutih** vektora \vec{l} i \vec{s} , kvantuje se kao i svaki drugi ugaoni moment odgovarajućim kvantnim brojem. Opšta pravila za orbitni i za spinski ugaoni moment izneta u odeljku 5.4.1, važe i za ukupni ugaoni moment uz odgovarajuće izmene i dopune.

Dakle, ukupni ugaoni moment je vektorski zbir orbitnog \vec{l} i spinskog \vec{s} ugaonog momenta:

$$(5.4.16b) \quad \vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (5.4.18)$$

i kvantuje se unutrašnjim kvantnim brojem (ili kvantnim brojem ukupnog ugaonog momenta) j :

$$\vec{j} = \sqrt{j(j+1)} \hbar \vec{j}^0. \quad (5.4.19a)$$

\vec{j}^0 je jedinični vektor čiji smer određuje smer vektora ugaonog momenta. Isti izraz u skalaranom obliku je:

$$|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad (5.4.19b)$$

$$|\vec{j}|^2 = j(j+1)\hbar^2. \quad (5.4.19c)$$

Opseg vrednosti koje može da ima unutrašnji kvantni broj određen je Klebš-Gordanovom (Clebsch-Gordan) serijom:

$$j = l + s, l + s - 1, \dots, |l - s| + 1, |l - s|. \quad (5.4.20a)$$

Uslov (5.4.20a) koji sledi iz kvantnomehantičkog razmatranja problema, koristićemo kao gotovo pravilo ne upuštajući se u njegovo objašnjavanje.

S obzirom na to da kod jednoelektronskog sistema (koji ovde razmatramo) kvantni broj s ima stalnu vrednost, $s = \frac{1}{2}$, izraz (5.4.20a) može da se napiše u jednostavnijem obliku:

$$j = l \pm \frac{1}{2} \quad \text{za} \quad l > 0 \quad (5.4.20b)$$

i:

$$j = +\frac{1}{2} \quad \text{za} \quad l = 0. \quad (5.4.20c)$$

Prostorno kvantovanje ukupnog ugaonog momenta izražava se na isti način kao i kvantovanje orbitnog ili spinskog momenta impulsa:

$$j_z = m_j \hbar \quad (5.4.21a)$$

$$m_j = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j. \quad (5.4.21b)$$

Ovde je m_j magnetni kvantni broj ukupnog momenta impulsa. Kao i ranije, vektor \vec{j} nalazi se negde na kupi čija je ivica $\sqrt{j(j+1)}\hbar$, a visina $m_j\hbar$. Isto tako, iz jednačine (5.4.21b) sledi da za dati kvantni broj, j , postoji ukupno $2j + 1$ stanja sa različitim vrednostima kvantnog broja m_j . Dakle, bez spoljašnjeg polja, stanja koja su određena kvantnim brojem j su $(2j + 1)$ -put degenerisana. Magnetno polje uklanja degeneraciju i stanja se cepaju na $2j + 1$ komponenta koje imaju međusobno različite energije, što ćemo detaljnije razmotriti u sledećem odeljku.

Svi odnosi izraženi jednačinama od (5.4.18) do (5.4.21) proizlaze iz kvantnomehantičke slike. Vektorski model, međutim, u velikoj meri olakšava njihovo prikazivanje kao i uzajamne odnose između njih. Na Slici 5.4.4 prikazano je slaganje vektora \vec{l} i \vec{s} , pri stvaranju ukupnog ugaonog momenta. Slaganje je malo složenije nego što to na prvi pogled izgleda jer istovremeno treba da se zadovolji nekoliko uslova. Veza između vektora \vec{l} , \vec{s} i \vec{j} je linearna, jednačina (5.4.18), kao i veza između njihovih kvantnih brojeva, izraz (5.4.20). Međutim, veza između intenziteta vektora je **nelinearna**:

$$\sqrt{l(l+1)} + \sqrt{s(s+1)} \neq \sqrt{j(j+1)}. \quad (5.4.22)$$

Ova nelinearnost predstavlja ključni uslov za vektorsko sabiranje momenata iz kojeg sledi da se vektor \vec{l} , \vec{s} i \vec{j} sabiraju samo pod određenim uglovima i da pri tome, kao što je prikazano na Slici 5.4.4b, **ne mogu da budu paralelni**. Dozvoljene uglove za slaganje vektora lako nalazimo kvadriranjem izraza (5.4.18):

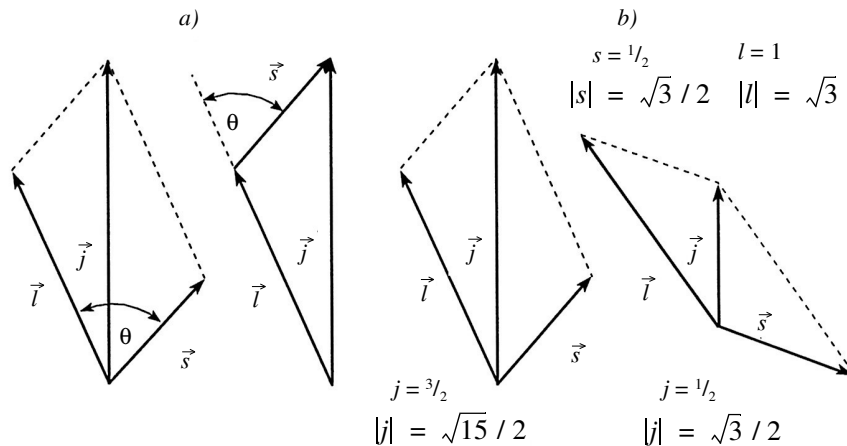
$$\vec{j} \cdot \vec{j} = (\vec{l} + \vec{s}) \cdot (\vec{l} + \vec{s})$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{l} \cdot \vec{l} + \vec{s} \cdot \vec{s} + 2\vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$|\vec{j}|^2 = |\vec{l}|^2 + |\vec{s}|^2 + 2|\vec{l}| \cdot |\vec{s}| \cos(\vec{l} \cdot \vec{s})$$

odakle dobijamo:

$$\cos(\vec{l} \cdot \vec{s}) = \frac{|\vec{j}|^2 - |\vec{l}|^2 - |\vec{s}|^2}{2|\vec{l}| \cdot |\vec{s}|}. \quad (5.4.23)$$



Slika 5.4.4 Ukupni ugaoni moment \vec{j} vektorski je zbir orbitnog \vec{l} i spinskog \vec{s} momenta impulsa (ugaonog momenta): a) vektori \vec{l} i \vec{s} sabiraju se po pravilu trougla ili po pravilu paralelograma, obrazujući kao razultantu ukupni ugaoni moment \vec{j} ; b) slaganjem orbitnog i spinskog momenta impulsa, za $l=1$ i $s=1/2$ dobijaju se dva vektora ukupnog ugaonog momenta sa $j=3/2$ i $j=1/2$.

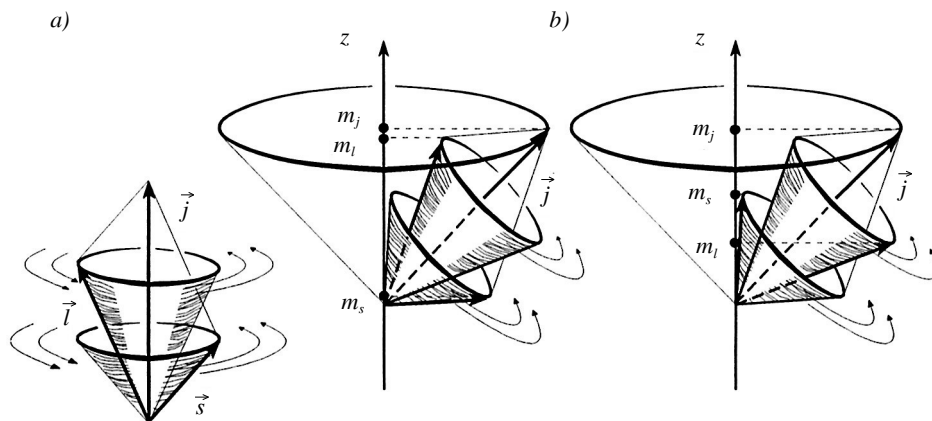
Zamenom modula i kvadrata vektora iz odgovarajućih izraza [(5.4.1b,c), (5.4.4b,c) i (5.4.19c)] dobijamo:

$$\cos(\vec{l} \cdot \vec{s}) = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}} \quad (5.4.23a)$$

odakle neposredno sledi da je ugao pod kojim se vektori slažu jednoznačna funkcija kvantnih brojeva j , l i s . S obzirom na to da za jednoelektronski sistem kvantni broj j može da ima samo dve vrednosti, jednačine (5.4.20b,c), za svako l moguća su samo dva ugla θ , Slika 5.4.4b.

Slika 5.4.4 pruža nam uvid samo u onaj deo uzajamnih geometrijskih odnosa između vektora \vec{l} , \vec{s} i \vec{j} , koji su algebarski izraženi jednačinama (5.4.23). Međutim, iz izraza (5.4.17) sledi da vektori \vec{l} i \vec{s} precesuju oko vektora \vec{j} . Precesija uopšte nije bitna za izražavanje njihovog sabiranja. Međutim, precesija je ključna za opisanje kvantovanja ukupnog ugaonog momenta i za uspostavljanje odnosa između magnetnih kvantnih brojeva m_l , m_s i m_j .

Na Slici 5.4.5 prikazana je celokupna šema slaganja **spregnutih** vektora \vec{l} i \vec{s} u ukupni ugaoni moment \vec{j} . Pored toga što se slažu samo pod posebnim uglovima, jednačine (5.4.23), vektori \vec{l} i \vec{s} precesuju oko vektora \vec{j} . Precesija se odvija i **bez spoljašnjeg polja** i posledica je **sprežanja** vektora, odnosno uzajamnog delovanja **magnetnih** komponenti kako je već opisano u odeljku 5.4.2.



Slika 5.4.5 Sistem **spregnutih** vektora \vec{l} , \vec{s} i \vec{j} : a) u odsustvu polja vektori orbitnog i spinskog ugaonog momenta \vec{l} i \vec{s} precesuju oko vektora ukupnog ugaonog momenta \vec{j} ; b) vektor \vec{j} može da ima određenu projekciju samo duž jednog, proizvoljno izabranog, pravca. Pošto u drugim pravcima ne može da ima određenu projekciju, vektor \vec{j} se nalazi negde na površini kupe koja je opisana oko pravca na kojem se traži projekcija. Bez spoljašnjeg polja vektor \vec{j} **ne** precesuje oko izabranog pravca (zbog pogodnosti kao pravac projektovanja najčešće se bira z-osa). Međutim, i tada vektori \vec{l} i \vec{s} precesuju oko vektora \vec{j} . Pošto se osa njihove precesije ne poklapa sa osom projektovanja, z-osom, vektori \vec{l} i \vec{s} ne mogu da imaju stalne projekcije na z-osu. Zbog toga se m_l i m_s tokom vremena menjaju, tj., nisu određeni.

U pogledu kvantovanja projekcije u proizvoljno izabranom pravcu, vektor \vec{j} ponaša se kao i slobodni vektori \vec{l} i \vec{s} . Znači, na proizvoljno izabranom pravcu vektor \vec{j} ima projekciju određenu izrazom (5.4.21a). Tada projekcija na bilo koji drugi pravac u principu ne može da bude poznata (niti određena). Zbog toga, kao i vektori \vec{l} i \vec{s} , vektor \vec{j} leži negde na površini kupe (sa napadnom tačkom u temenu kupe) koja je opisana oko odabranog pravca, a čiji je ugao određen uzajamnim odnosom kvantnih brojeva j i m_j . Kao i kod izraza (5.4.3) i ovde imamo:

$$\cos \theta = \frac{j_z}{|\vec{j}|} = \frac{m_j}{\sqrt{j(j+1)}}. \quad (5.4.24)$$

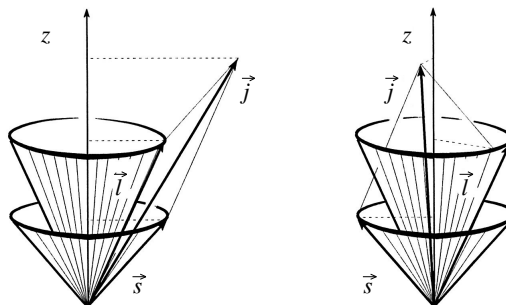
Projektovanje vektora \vec{j} na izabrani pravac šematski je prikazano na Slici 5.4.5b. Potpuna slika nešto je složenija nego ranije, jer je vektor \vec{j} zbir orbitnog i spinskog ugaonog momenta koji i dalje precesuju oko njega. Sada je malo teže da se slikovito prikaže deo prostora u kojem mogu da se nađu vektori \vec{l} i \vec{s} (svaki se nalazi negde na površini sopstvene precesione kupe, čija osa leži negde na površini kupe koja je opisana oko proizvoljno izabranog pravca) ali taj detalj u modelu i nije naročito važan. Mnogo je važnije pitanje šta je sa magnetnim kvantnim brojevima m_l i m_s odnosno da li se (i kako se) orbitni i spinski ugaoni momenti kvantuju duž odabranog pravca.

Sa Slike 5.4.5b očigledno je da je $m_j = \text{const.}$ sve dok vektor \vec{j} ima stalni intenzitet. Vektor \vec{j} ima stalni intenzitet sve dok je ugao između vektora \vec{l} i \vec{s} stalan. Ugao između vektora \vec{l} i \vec{s} je stalan sve dok su vektori \vec{l} i \vec{s} spregnuti. A, kada su vektori \vec{l} i \vec{s} spregnuti onda oni precesuju oko stalnog vektora \vec{j} . Međutim, s obzirom na to da se osa precesije (pravac vektora \vec{j}) ne poklapa sa osom projektovanja (koja je ovde proizvoljno odabrana i obeležena kao z-osa), vidimo da projekcije vektora \vec{l} i \vec{s} na odabranu osu (z-osu) nisu stalne. To znači, da kvantni brojevi m_l i m_s ne mogu da budu jednovremeno određeni kada i kvantni broj m_j . Tada kažemo da za sistem spregnutih ugaonih momenata kvantni brojevi m_l i m_s nisu dobri kvantni brojevi. (Nisu dobri jer pomoću njih ne može da se opiše nijedna osobina sistema.) Kvantni brojevi l i s i tada su dobri kvantni brojevi jer se pomoću njih izražava veličina odgovarajućih ugaonih momenata \vec{l} i \vec{s} . Dakle, sistem spregnutih ugaonih momenata (spinskog i orbitnog) opisuju se kvantnim brojevima l, s, j i m_j .

Pogledajmo sada šta se dešava sa ukupnim ugaonim momentom ako orbitni spinski momenti **nisu spregnuti**. Ovo srećemo kada je konstanta sprežanja veoma mala (na primer, elektron u atomu vodonika sa velikim glavnim kvantnim brojem) ili kada se spoljašnjim delovanjem izazove raspregzanje inače spregnutih momenata (na primer, delovanjem jakog magnetnog polja, videti odeljak 6.1.3). Izraz (5.2.18) kojim se opisuje sabiranje momenata važi i kada momenti nisu spregnuti ali tada ne

važi izraz (5.4.16a), koji je proistekao iz uslova za sprezanje momenata i koji pokazuje da je ukupni ugaoni moment stalan. Prema tome, možemo da zaključimo da u **odsustvu sprezanja** ugaonih momenata (ili pri njihovom **rasprezanju**) ukupni ugaoni moment nije stalan, tj. vektor \vec{j} nije konstanta kretanja. Takva situacija šematski je predstavljena na Slici 5.4.6. Tada, u stvari, ukupni ugaoni moment uopšte ne može da se odredi jer neodređenost položaja orbitnog ugaonog momenta po njegovoj kapi nije ni u kakvoj vezi sa neodređenošću položaja spinskog ugaonog momenta na odgovarajućoj kapi. Znači, u jednom trenutku ukupni ugaoni moment mogao bi da ima izvesnu vrednost, koja je već u sledećem trenutku drukčija, kao što je šematski prikazano na Slici 5.4.6. Drugim rečima, kada ugaoni momenti nisu spregnuti ili kada su raspregnuti, ponašaju se kao izolovani momenti koji ne primećuju prisustvo susednog momenta. Zbog toga nespregnuti (raspregnuti) ugaoni momenti, u proizvoljno izabranom pravcu, imaju projekcije određene kao i ranije. Tada su kvantni brojevi m_l i m_s dobri kvantni brojevi. Ako se sistem nespregnutih ili raspregnutih momenata nađe u spoljašnjem magnetnom polju, tada u tom polju svaki moment precesuje sopstvenom Larmorovom frekvencijom. Pošto su, uopšteno gledano, precesione frekvencije različite, to će i vektorski zbir momenata tokom vremena da bude promenljiv, pa je time i ukupni ugaoni moment neodređen.

*Slika 5.4.6 Slaganje orbitnog i spinskog ugaonog momenta kada između njih **ne postoji sprezanje**. Svaki moment zadržava sopstvene osobine nezavisno od prisustva drugog momenta. Pošto se svaki nalazi na površini sopstvene kupe pod relativnim uglovima koji, u principu, ne mogu da se utvrde, to je i njihov zbir, dakle, ukupni ugaoni moment \vec{j} , u osnovi neodređen. Tada su, međutim, kvantni brojevi m_l i m_s dobri kvantni brojevi jer imaju diskretne, stalne vrednosti kao kod slobodnih momenata.*



Dakle, kada nema sprezanja (ili prilikom raspreganja) ugaonih momenata, ukupni ugaoni moment ne može da se odredi. Stanje sistema određuje se kvantnim brojevima l , m_l , s i m_s . Do sada smo posmatrali jednoelektronski atom u kojem dolazi do slaganja orbitnog i spinskog ugaonog momenta. Takav sistem predstavlja samo poseban slučaj opšteg problema slaganja ugaonih momenata. Sistem može da se sastoji od različitih momenata, na primer, od dve čestice koje imaju samo spinski moment, dve čestice koje imaju samo orbitni ugaoni moment, čestice sa spinom koja se nalazi na rotirajućem molekulu, itd. Jasno je da postoje neka zajednička načela za sve sisteme koje smo pomenuli u svakom pojedinačnom slučaju. Ovde ćemo, za opšti slučaj sistema koji čine dva ugaona momenta, \vec{j}_1 i \vec{j}_2 , određena kvantnim brojevima \vec{j}_1 i \vec{j}_2 , da navedemo osnovna načela za njihovo slaganje, ne ulazeći u postupke kojima se do njih došlo:

a) Dužina (intenzitet) vektora ukupnog ugaonog momenta je $\sqrt{j(j+1)}$ Plankovih jedinica (\hbar -jedinica), gde kvantni broj ukupnog ugaonog momenta, j , može da ima neku od vrednosti određenu Klebš-Gordanovom serijom:

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2| + 1, |j_1 - j_2|; \quad (5.4.25)$$

b) Vektor ukupnog ugaonog momenta leži negde na kugli koja je opisana oko proizvoljnog pravca u odnosu na koji se određuje njegova projekcija. (Pošto se pravac duž kojeg se vektor projektuje najčešće određuje spoljašnjim magnetnim poljem, to je najpogodnije i pravac i polje orijentisati duž z-ose.);

c) Intenziteti komponentnih ugaonih momenata su $\sqrt{j_1(j_1+1)}$ i $\sqrt{j_2(j_2+1)}$ \hbar -jedinica. Oni imaju određene vrednosti i kada vektor \vec{j} ima određenu vrednost;

d) Projekcija ukupnog ugaonog momenta na z-osu iznosi $m_j \hbar$ -jedinica. Kod predstavljanja preko sprezanja (dakle, kada je kvantni broj j određen) vrednost m_{j_1} i m_{j_2} su neodređene ali je njihov zbir jednak vrednosti m_j ;

e) Kod predstavljanja preko **nespregnutih** vektora, kada je kvantni broj j neodređen, pojedine komponente m_{j_1} i m_{j_2} imaju diskretne, stalne vrednosti, pa su tada m_{j_1} i m_{j_2} dobri kvantni brojevi.

Prema tome, sistem koji se sastoji od dva ugaona momenta određen je sa četiri kvantna broja. Kod predstavljanja preko **spregnutih** vektora to su j_1, j_2, j i m_j , a kod predstavljanja preko **nespregnutih** vektora to su j_1, m_{j_1}, j_2 i m_{j_2} . Formalno gledano, izbor načina predstavljanja sistema je proizvoljan. Različita predstavljanja su samo različiti načini za posmatranje složenih sistema. Normalno, najjasniji opis sistema dobija se kada predstavljanje zaista odgovara fizičkoj prirodi sistema. Tamo gde postoji sprezanje između ugaonih momenata pogodnije je predstavljanje preko spregnutih vektora. Na primer, jednačine kretanja ugaonih momenata prilikom spin-orbitnog međudejstva mnogo su očiglednije i sažetije kada se izraze preko vektora ukupnog ugaonog momenta, jednačina (5.4.15), dakle, u predstavljanju preko sprezanja, nego preko pojedinih momenata (predstavljanjem preko nespregnutih vektora), izrazi (5.4.10) i (5.4.11).

5.4.4 Ukupni magnetni moment

U prethodnom odeljku videli smo kako se vektorskim sabiranjem orbitnog i spinskog ugaonog momenta dobija ukupni ugaoni moment jednoelektronskog atoma. Pošto su i orbitni ugaoni moment i spinski ugaoni moment praćeni odgovarajućim magnetnim momentima, jasno je da je i ukupni ugaoni moment, \vec{j} , praćen **ukupnim magnetnim momentom** $\vec{\mu}_j$.

Kao što ukupni ugaoni moment dobijamo vektorskim sabiranjem ugaonih momenata:

$$(5.4.18) \quad \vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

tako i ukupni magnetni moment $\vec{\mu}_j$ dobijamo sabiranjem orbitnog $\vec{\mu}_l$, i spinskog $\vec{\mu}_s$ magnetnog momenta:

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s. \quad (5.4.26a)$$

Zamenom momenata $\vec{\mu}_l$ i $\vec{\mu}_s$ iz jednačina (5.4.6b) i (5.4.8b) u jednačinu (5.4.26a), uz $g_l = 1$ i $g_s \approx 2$, ukupni **magnetni** moment $\vec{\mu}_j$ možemo da izrazimo kao vektorski zbir odgovarajućih ugaonih momenata:

$$\vec{\mu}_j = -\frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{l} + 2\vec{s}) \quad (5.4.26b)$$

i s obzirom na (5.4.18):

$$\vec{\mu}_j = -\frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{j} + \vec{s}). \quad (5.4.26c)$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da ukupni magnetni moment $\vec{\mu}_j$ ne leži na istom pravcu kao ugaoni moment \vec{j} . (U prethodnom odeljku videli smo da \vec{j} i \vec{s} ne mogu da leže na istom pravcu.) Sabiranje vektora magnetnih momenata šematski je prikazano na Slici 5.4.7. Pravac vektora $\vec{\mu}_j$, saglasno izrazu (5.4.26c), poklapa se sa pravcem rezultante vektora $\vec{j} + \vec{s}$.

Ranije smo videli da spregnuti vektori \vec{l} i \vec{s} precesuju oko pravca ukupnog ugaonog momenta \vec{j} . Očigledno je da će i svi ostali vektori precesovati oko istog pravca. Dakle, vektor ukupnog magnetnog momenta $\vec{\mu}_j$ precesuje oko pravca vektora ukupnog ugaonog momenta \vec{j} . Zbog stalne promene pravca, intenzitet vektora $\vec{\mu}_j$ ne može da se meri eksperimentalno. Međutim, vrednost vektora $\vec{\mu}_j$ usrednjena po vremenu (u intervalu mnogo dužem od perioda precesije) jednaka je njegovoj projekciji na pravac precesovanja (pravac vektora \vec{j}). Dakle, zbog precesije ukupnog magnetnog momenta $\vec{\mu}_j$ oko ukupnog ugaonog momenta \vec{j} , magnetne osobine atoma uslovljene su stvarnim magnetnim momentom $(\vec{\mu}_j)_j$, koji predstavlja projekciju vektora $\vec{\mu}_j$ na pravac vektora \vec{j} , Slika 5.4.7b:

$$(\vec{\mu}_j)_j = -|\vec{\mu}_j| \cos(\vec{\mu}_j, \vec{j}) \vec{j}^\circ. \quad (5.4.27a)$$

Znak minus pokazuje da je vektor stvarnog magnetnog momenta $(\vec{\mu}_j)_j$ antiparalelan vektoru ukupnog ugaonog momenta \vec{j} . Podsećamo na to da je \vec{j}° , kao i ranije, jedinični vektor u pravcu ukupnog ugaonog momenta.

Stvarni magnetni moment $(\vec{\mu}_j)_j$ na drugi način može da se izrazi projektovanjem njegovih komponentata na pravac vektora \vec{j} . Tako, projektovanjem izraza (5.4.26c) na pravac vektora \vec{j} , nalazimo:

$$(\vec{\mu}_j)_j = -\frac{\mu_B}{\hbar} [|\vec{j}| \cos(\vec{j} \cdot \vec{j}) + |\vec{s}| \cos(\vec{s} \cdot \vec{j})] \vec{j}^\circ. \quad (5.4.27b)$$

$$\vec{s} \cdot \vec{j} = |\vec{s}| |\vec{j}| \cos(\vec{s} \cdot \vec{j}).$$

Landeov g -faktor atoma možemo da izrazimo kao:

$$g_j = 1 + \frac{\vec{s} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|^2}. \quad (5.4.29b)$$

Skalarni proizvod $\vec{s} \cdot \vec{j}$ lako nalazimo iz izraza (5.4.18):

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{l} + \vec{s} \\ \vec{l} &= \vec{j} - \vec{s} \\ |\vec{l}|^2 &= (\vec{j} - \vec{s})^2 \\ |\vec{l}|^2 &= |\vec{j}|^2 + |\vec{s}|^2 - 2\vec{s} \cdot \vec{j} \\ \vec{s} \cdot \vec{j} &= \frac{|\vec{j}|^2 - |\vec{l}|^2 + |\vec{s}|^2}{2} \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

što zamenom u (5.4.29b) daje:

$$g_j = 1 + \frac{|\vec{j}|^2 - |\vec{l}|^2 + |\vec{s}|^2}{2|\vec{j}|^2}. \quad (5.4.29c)$$

Unošenjem vrednosti za kvadrate vektora ugaonih momenata iz (5.4.19c), (5.4.1c) i (5.4.4c), najzad dobijamo:

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}. \quad (5.4.29d)$$

Iz jednačine (5.4.29d) vidimo da se atomski g -faktor za $s = 0$ ($j = l$) svodi na orbitni $g_l = g_l = 1$, a za $l = 0$ (tada je $j = s$) na spinski $g_j = g_s \approx 2$. Dakle, atomski g -faktor za jednoelektronski atom zavisi od vrednosti kvantnih brojeva l , s i j može da ima vrednosti između 1 ($g_j = g_l$) i 2 ($g_j = g_s$).

Landeov g -faktor ima veliki značaj jer se preko njega izražavaju magnetne osobine atoma. On se javlja zbog razlike u žiromagnetnim odnosima između orbitnih i spinskih momenata.

5.4.5 Spin-orbitno sprezanje

Ovde ćemo da dovršimo razmatranje započeto u odeljku 5.3 koje smo prekinuli zbog toga što u okviru poluklasične slike nismo mogli valjano da izrazimo skalarni proizvod orbitnog i spinskog ugaonog momenta, jednačina (5.3.6). Skalarni proizvod možemo da izrazimo preko kvantnih brojeva j , l i s koristeći vektorski model. Korišćenjem srednje vrednosti $1/r^3$, preuzete iz kvantne mehanike, nalazimo **tačan** izraz za konstantu spin-orbitnog međudejstva jednoelektronskog atoma.

Dakle, energiju spin-orbitnog međudejstva izražavamo preko konstante spin-orbitnog sprežanja, a :

$$(5.3.6b) \quad \mu_{l,s} = a \frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{\hbar^2} \quad (5.4.30)$$

gde je:

$$(5.3.7b) \quad a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2\hbar^2}{2m^2c^2} \overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)}. \quad (5.4.31)$$

U odeljku 5.3.2 dobili smo približan izraz za konstantu spin-orbitnog sprežanja a , koristeći srednju vrednost $(1/r^3)$ iz Borovog modela:

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3} \frac{Z}{n^6}$$

gde je r_1 atomski poluprečnik prve Borove orbite atoma vodonika. **Tačan** izraz za konstantu spin-orbitnog sprežanja a može da se dobije ako se preuzme kvantnomehanički izračunata srednja vrednost $(1/r^3)$ za atom sličan vodoniku:

$$\overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} = \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_1^3} \frac{Z^3}{n^3 l \left(l + \frac{1}{2}\right) (l + 1)}. \quad (5.4.32)$$

Ako ovaj izraz uporedimo sa odgovarajućim izrazom iz Borovog modela, vidimo da se **tačna** vrednost konstante spin-orbitnog sprežanja a dobija iz približnog izraza (5.3.7e) zamenom faktora n^6 izrazom $n^3 l (l + 1/2) (l + 1)$:

$$a = E_0 \alpha^2 \frac{Z^4}{n^3 l \left(l + \frac{1}{2}\right) (l + 1)}. \quad (5.4.33)$$

Skalarni proizvod $\vec{l} \cdot \vec{s}$ u izrazu (5.4.30) izračunavamo iz kvadrata jednačine (5.4.18):

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{l} + \vec{s} \\ |\vec{j}|^2 &= (\vec{l} + \vec{s})^2 \\ (5.4.18) \quad |\vec{j}|^2 &= |\vec{l}|^2 + |\vec{s}|^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} \\ \vec{l} \cdot \vec{s} &= \frac{|\vec{j}|^2 - |\vec{l}|^2 - |\vec{s}|^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

Zamenom odgovarajućih kvadrata vektora iz (5.4.19c), (5.4.1c) i (5.4.4c), nalazimo:

$$\frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{\hbar^2} = \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]. \quad (5.4.35)$$

Uvrštavanjem dobijenog izraza u jednačinu (5.4.30) dobijamo **tačnu** jednačinu za energiju spin-orbitnog međudejstva u atomima sličnim vodoniku:

$$U_{l,s} = \frac{1}{2}a[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (5.4.36a)$$

odnosno pomoću (5.4.44):

$$U_{l,s} = \frac{E_0 \alpha^2 Z^4}{2} \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{n^3 l(l + \frac{1}{2})(l+1)}. \quad (5.4.36b)$$

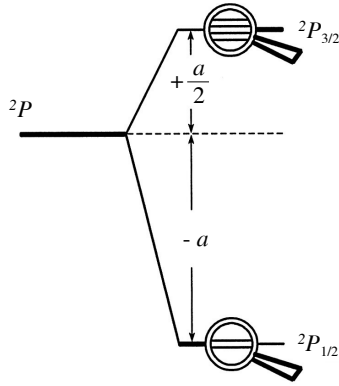
Iz jednačine (5.4.36b) struktura energijskih nivoa za svaki spektralni term dobija se zamenom odgovarajućih vrednosti kvantnih brojeva j , l i s . Na primer, za term 2P imamo:

$$\begin{aligned} l &= 1 \text{ (jer je u pitanju } P \text{ term),} \\ s &= 1/2 \text{ (jer je multipletnost } 2, 2s+1=2), \\ j_1 &= l + 1/2 = 3/2, & j_2 &= l - 1/2 = 1/2, \\ \text{pa je:} \end{aligned}$$

$$U_{j_1} = \frac{1}{2}a$$

$$U_{j_2} = -a$$

što je šematski prikazano na Slici 5.4.8. Ovu situaciju, formalno izvedenu iz jednačine (5.4.36a) lako je razumeti u okviru vektorskog modela kao posledicu međudejstva spinskog magnetnog momenta $\vec{\mu}_s$ i lokalnog magnetnog polja orbitnog kretanja \vec{B}_l . Kada su vektori \vec{l} i \vec{s} „paralelni”, dakle, kada je $j = 3/2$, vektori $\vec{\mu}_s$ i \vec{B}_l su „antiparalelni” jer je vektor $\vec{\mu}_s$ antiparalelan sa \vec{s} , dok je vektor \vec{B}_l paralelan sa \vec{l} . (Izraz „paralelni” ovde označava samo da je ugao θ između naznačenih vektora manji od $\pi/2$, tj. da je $\cos\theta > 0$. Na isti način za „antiparalelne” vektore je $\cos\theta < 0$.) Saglasno jednačini (D-5.2.13b) energija međudejstva magnetnog momenta i „antiparalelnog” spoljašnjeg polja je **pozitivna**. Na isti način za $j = 1/2$ \vec{l} i \vec{s} su „antiparalelni”, a $\vec{\mu}_s$ i \vec{B}_l su „paralelni”, dakle $\cos\theta > 0$, pa je energija međudejstva negativna. Zbog toga je energija terma pri $j = 3/2$ pozitivna, a pri $j = 1/2$ negativna u odnosu na energiju istog terma kada ne bi bilo spin-orbitnog sprežanja. Treba uočiti to da energija spektralnog terma ne zavisi od magnetnog kvantnog broja m_j , tj. od usmerenja ukupnog ugaonog momenta u prostoru. To znači da u višem stanju označenom sa ${}^2P_{3/2}$, postoji $2 \times 3/2 + 1 = 4$, a u nižem stanju, koje se označav sa ${}^2P_{1/2}$



Slika 5.4.8 Cepanje 2P terma zbog spin-orbitnog međudejstva. U odsustvu međudejstva, energija stanja sa različitim j -vrednostima je ista. Dakle, stanja su degenerisana sa stepenom degeneracije $(2j_1 + 1) + (2j_2 + 1)$ što za $j_1 = 1/2$ i $j_2 = 3/2$ iznosi 6. Spin-orbitno međudejstvo uklanja degeneraciju nivoa sa različitim j -vrednostima. Međutim, novi energijski nivoi i dalje su degenerisani i to za $j = 1/2$ dvostruko, a za $j = 3/2$ četverostruko. Uočimo da spin-orbitno međudejstvo ne menja težište novih nivoa u odnosu na originalni nivo.

ima $2 \times 1/2 + 1 = 2$ degenerisana nivoa, Slika 5.4.8. Ovo važi u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja. Pojava spoljašnjeg polja, kao što će se videti u 6. poglavlju, uklanja degeneraciju i naznačeni energijski nivoi cepaju se na pojedinačne komponente. Tako se nivo $^2P_{3/2}$ cepa na četiri, a nivo $^2P_{1/2}$ na dve komponente.

Isto tako, važno je uočiti da se uzimanjem u obzir spin-orbitnog međudejstva „težište” energijskih nivoa ne menja. Term $^2P_{1/2}$ pomeren je za $-a$, a term $^2P_{3/2}$ za $+1/2 a$. Međutim, ako uzmemo u obzir njihove statističke težine, a one su 2 i 4, nalazimo da je rezultujući pomak jednak nuli, tj. da je „težište” nepromenjeno:

$$(-a)2 + (+1/2 a)4 = 0.$$

Na kraju, ono što smo saznali o finoj strukturi jednoelektronskih stanja možemo sažeti na sledeći način:

a) Međudejstvo spinskog magnetnog momenta i lokalnog magnetnog polja orbitnog kretanja, izraženo kao međudejstvo spinskog ugaonog i orbitnog ugaonog momenta, cepa svaki energijski nivo na dva dela. Rezultat toga je dubletna struktura nivoa. Na primer, gornje stanje iz kojeg nastaje natrijumova D linija, $3P$ stanje, cepa se na stanja $3P_{1/2}$ i $3P_{3/2}$, kao što je pokazano na Slici 5.4.8;

b) S termovi se ne cepaju pošto pri $l = 0$ ne postoji lokalno magnetno polje \vec{B}_l u kojem bi spinski magnetni moment pri različitim usmerenjima zadobijao različite energije;

c) Nivoi sa većim vrednostima kvantnog broja j imaju veće energije, jednačina (5.4.36a);

d) Konstanta spin-orbitnog sprezanja a proporcionalna je četvrtom stepenu naelektrisanja jezgra.

Primeri

Primer 5.4.1 Pokazati da za jednoelektronski atom cepanje energijskih nivoa prouzrokovano spin-orbitnim međudejstvom može da se izrazi jednačinom:

$$\Delta U_{j_1, j_2} = \frac{E_0 \alpha^2 Z^4}{n^3 l(l+1)} = a \left(l + \frac{1}{2} \right).$$

REŠENJE:

$$\begin{aligned}\Delta U_{j_1, j_2} &= U_{j_1} - U_{j_2} \\ U_{j_1} &= \frac{1}{2}a[j_1(j_1 + 1) - l(l + 1) - s(s + 1)] \\ (5.4.36a) \quad U_{j_2} &= \frac{1}{2}a[j_2(j_2 + 1) - l(l + 1) - s(s + 1)].\end{aligned}$$

Pošto se kvantni brojevi l i s ne menjaju (menja se samo j), nalazimo:

$$\begin{aligned}\Delta U_{j_1, j_2} &= U_{j_1} - U_{j_2} = \frac{1}{2}a[j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)] \quad (\text{P-5.4.1.1}) \\ &= \frac{1}{2}a(j_1 - j_2)(j_1 + j_2 + 1).\end{aligned}$$

Za jednoelektronski atom je:

$$(j_1 - j_2) = 1 \quad \text{i} \quad (j_1 + j_2) = 2l$$

što zamenom u (P-5.4.1.1) daje:

$$\Delta U_{j_1, j_2} = \frac{1}{2}a(2l + 1) = a\left(l + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{P-5.4.1.2a})$$

Zamenom konstante spin-orbitnog sprezanja a iz (5.4.33), najzad dobijamo:

$$U_{j_1, j_2} = \frac{E_0 \alpha^2 Z^4}{n^3 l(l + 1)}. \quad (\text{P-5.4.1.2b})$$

Primer 5.4.2 Izračunati veličinu magnetne indukcije u atomu natrijuma, koja nastaje orbitnim kretanjem elektrona u stanju iz kojeg se javljaju dve natrijumove D linije (588,995 nm, 589,592 nm).

REŠENJE:

Natrijumov dublet javlja se pri prelazu iz stanja $l = 1$ u stanje sa $l = 0$. Razdvojeno je samo ono stanje pri $l = 1$. Razliku u energijama između dva podstanja, $3P_{1/2}$ i $3P_{3/2}$, dobijamo iz razlike talasnih dužina prema izrazu:

$$\begin{aligned}E &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} \\ |\Delta E| &= \frac{hc|d\lambda|}{\lambda^2} \\ |\Delta E| &= \frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 0,597 \times 10^{-9}}{(589 \times 10^{-9})^2} = 3,42 \times 10^{-22} \text{ J}.\end{aligned}$$

Ova energijska razlika shvaćena kao međudejstvo spinskog magnetnog momenta $\vec{\mu}_s$, i lokalnog magnetnog polja \vec{B}_l , može da se izrazi kao razlika energija elektrona u dva spinska stanja sa $m_s = +1/2$ i $m_s = -1/2$. Dakle:

$$\begin{aligned} U &= g_s m_s \mu_B B_l \\ \Delta U &= g_s \Delta m_s \mu_B B_l \\ (5.2.15b) \quad g_s &= 2, \quad \Delta m_s = \left(\frac{1}{2} - -\frac{1}{2} \right) = 1, \\ \Delta U &= 2 \mu_B B_l. \end{aligned}$$

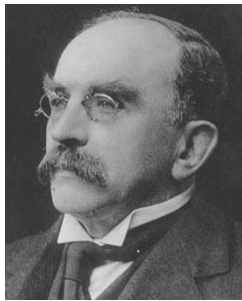
Traženu indukciju nalazimo iz poslednjeg izraza, zamenom vrednosti energijske razlike $\Delta U = \Delta E$ i Borovog magnetona μ_B :

$$\begin{aligned} \mu_B &= 9,274 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1} \\ (5.1.9c) \quad B_l &= \frac{\Delta E}{2 \mu_B} = \frac{3,42 \times 10^{-22} \text{ J}}{2 \times 9,274 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}} = 18,4 \text{ T}. \end{aligned}$$

Zadaci

Z-5.4.1 Izračunati moguće vrednosti skalarnog proizvoda $\vec{l} \cdot \vec{s}$ ako je $l = 3$ i $s = 1/2$.
 $[\vec{l} \cdot \vec{s} = 3/2 \hbar^2, -2\hbar^2]$.

Z-5.4.2 Izračunati $\vec{l} \cdot \vec{s}$ za elektron u $^2D_{3/2}$ stanju.
 $[\vec{l} \cdot \vec{s} = -3/2 \hbar^2]$.



Ser Džozef Larmor (Sir Joseph Larmor, 1857–1942), engleski fizičar i matematičar, profesor matematike na Kembridžu. Bavio se teorijskom fizikom, posebno teorijom elektrona, u okviru koje je otkrio precesiju, kasnije po njemu nazvanu Larmorova precesija.