

3. KVANT DEJSTVA

3.1 ZRAČENJE CRNOG TELA

D-3.1 Jednačina ravnog talasa

Razmotrimo talase koji se prostiru duž neke prave linije, na primer, žice čiji se jedan kraj održava u stanju oscilovanja. Označićemo sa s rastojanje (elongaciju) tačke žice od njenog ravnotežnog položaja. Talasni proces će biti definisan ako se zna vrednost s u svakom trenutku vremena t , za sve vrednosti položaja x duž pravca prostiranja talasa. Neka se talasni proces odlikuje kružnom frekvencijom ω i amplitudom a (najveće rastojanje od ravnotežnog položaja). Bitna karakteristika talasa je i talasna dužina λ koja predstavlja najmanje rastojanje duž x -ose između dve tačke (A i B na Slici D-3.1.1) koje osciluju u istoj fazi. Pored zavisnosti veličine pomeranja s od položaja x u datom trenutku, talasni proces odlikuje se i zavisnošću u od vremena t . Ako se oscilacije u tački A izvede po zakonu:

$$s = a \cos \omega t \quad (\text{D-3.1.1})$$

pri čemu t predstavlja vreme od početka oscilovanja, tada će oscilacije koje se šire od tačke A doći do neke tačke A' na rastojanju x za vreme $\tau = x/v_f$, gde je v_f tzv. fazna brzina talasa. Fazna brzina talasa povezuje talasnu dužinu λ s periodom oscilovanja T , vremenom posle kojeg se u posmatranoj tački ponovo uspostavlja ista faza oscilovanja:

$$v_f = \frac{\lambda}{T}. \quad (\text{D-3.1.2})$$

Oscilacije u tački A' vrše se po zakonu:

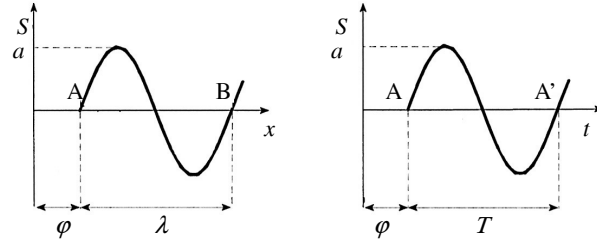
$$s = a \cos \omega t' \quad (\text{D-3.1.3})$$

pri čemu pretpostavljamo da se oscilacije ne prigušuju, tj. da je amplituda a stalna. U trenutku t' tačka A' je u istoj fazi oscilovanja kao tačka A u trenutku t , tako da možemo t' u jednačini (D-3.1.3) da zamenimo sa $t - \tau$, odnosno sa $t - x/v_f$:

$$s = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_f} \right). \quad (\text{D-3.1.4})$$

Ukoliko postoji neka početna faza φ kao na Slici D-3.1.1, tada ravni monohromatski talas prikazujemo izrazom:

$$s = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_f} \right) + \varphi \right]. \quad (\text{D-3.1.5})$$



Slika D-3.1.1 Uz jednačinu ravnog talasa.

Površina čije sve tačke imaju istu vrednost faze naziva se ekvifazna površina. U posmatranom slučaju ekvifazna površina je ravan:

$$x = \text{const.}$$

a normala na ovu površinu poklapa se sa x -osom. Iz uslova konstantnosti faze:

$$t - \frac{x}{v_f} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad x = v_f t + \text{const.}$$

sledi da faza brzina označava brzinu pomeranja ekvifazne ravni. Funkcija s odlikuje se vremenskom i prostornom periodičnošću. Na osnovu vremenske periodičnosti proizlazi da posle konstantnog perioda vremena T mora da bude zadovoljena sledeća jednakost:

$$a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_f} \right) + \varphi \right] = a \cos \left[\omega \left(t + T - \frac{x}{v_f} \right) + \varphi \right]$$

što je ispunjeno za:

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

gde je ν linijska učestanost. Zbog prostorne periodičnosti sledi da se, u datom trenutku t , pri promeni koordinate x za λ (talasna dužina), vrednost funkcije s ne menja, što izražavamo jednakošću:

$$a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_f} \right) + \varphi \right] = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \lambda}{v_f} \right) + \varphi \right]$$

odnosno:

$$\frac{\omega\lambda}{v_f} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi v_f}{\omega} = \frac{v_f}{\nu}$$

ili:

$$v_f = \lambda \nu$$

a to je jednačina koja povezuje faznu brzinu i talasnu dužinu.

Posmatrajmo sada opštiji slučaj. Neka se naš talas prostire u pravcu x' , koji s koordinatnim osama x , y , i z redom zaklapa uglove α , β i γ . Ovo je istovremeno i pravac normale na ekvifaznu ravan, dok jednačina ekvifazne ravni u ovom slučaju glasi:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \text{const.}$$

Talasni vektor⁶ koji je po definiciji usmeren duž pozitivne normale na ekvifaznu ravan, predstavimo u obliku:

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$$

dok je intenzitet talasnog vektora:

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{D-3.1.6})$$

odakle se dobijaju sledeće veze:

$$\cos \alpha = \frac{k_x}{2\pi} \lambda; \quad \cos \beta = \frac{k_y}{2\pi} \lambda; \quad \cos \gamma = \frac{k_z}{2\pi} \lambda. \quad (\text{D-3.1.7})$$

Kako posmatramo prostiranje talasa duž x -koordinate, to jednačina (D-3.1.5) sada ima sledeći oblik:

$$s = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x'}{v_f} \right) + \varphi \right]. \quad (\text{D-3.1.8})$$

Veza između x' - koordinate i koordinata x , y i z izračunava se iz proste geometrijske slike i ima oblik:

$$x' = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

pa se, zamenjivanjem ove jednakosti u (D-3.1.8) i uz $v_f = \lambda \nu$, dobija:

$$s = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda \nu} \right) + \varphi \right] = \quad (\text{D-3.1.9})$$

⁶ Talasni vektor se prema usvojenim konvencijama označava simbolom k kojim se, takođe, označava i jedinični vektor duž x -ose što, nažalost, može izazvati zabunu.

$$= a \cos \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) + \varphi \right].$$

Kako su na osnovu jednačine (D-3.1.6) komponente talasnog vektora:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha ; \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta ; \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$$

sledi:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = x k_x + y k_y + z k_z = \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (\text{D-3.1.10})$$

gde je \vec{r} radijus vektor bilo koje tačke na ekvifaznoj površini. Na osnovu jednačine (D-3.1.10) izraz (D-3.1.9) može da se napiše u obliku:

$$s = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi). \quad (\text{D-3.1.11})$$

Jednačina ravnog talasa može da se napiše kako u trigonometrijskom obliku [jednačine (D-3.1.8), odnosno (D-3.1.11)], tako i u kompleksnom obliku:

$$s = a e^{i[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi]} = a \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (\text{D-3.1.12})$$

ili ako se uvede kompleksna amplituda:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot e^{i\varphi} \\ s &= A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \end{aligned} \quad (\text{D-3.1.13})$$

Napomenimo da jednačine ravnog talasa [(D-3.1.11) i (D-3.1.13)] predstavljaju partikularna rešenja parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, talasne jednačine. Naime, iz osnovnih jednačina elektromagnetnog polja u vakuumu – iz Maksvelovih jednačina može da se pokaže da jačine električnog i magnetnog polja van izvora poremećaja, zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu istog oblika, pa se ponašaju na isti način kako u prostoru tako i u vremenu. U sredini koja nije provodna ova diferencijalna jednačina (talasna jednačina) ima oblik:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (\text{D-3.1.14})$$

s ovde predstavlja komponentu jačine električnog ili magnetnog polja. Lako može da se pokaže da jednačine ravnog talasa, jednačine (D-3.1.12) i (D-3.1.13), zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu (D-3.1.14) odnosno predstavljaju njena partikularna rešenja.

Krajem 19. veka bilo je dobro poznato da zagrejana čvrsta tela emituju elektromagnetno zračenje u kojem su zastupljene sve talasne dužine (odnosno frekvencije) ali s različitim intenzitetom. Kao što emituju, čvrsta tela mogu i da apsorbuju zračenje koje se odlikuje određenom spektralnom raspodelom karakterističnom za

određenu temperaturu. Telo apsorpcijom dobija, a emisijom gubi energiju. Sistem koji od okoline prima energiju koja upravo kompenzuje gubitak energije usled zračenja nalazi se u ravnoteži i pripisujemo mu neku temperaturu T . Ukoliko je energija koju telo dobija spolja nedovoljna za potpunu kompenzaciju energije izgubljene zračenjem, dolazi do smanjenja unutrašnje energije tela, zbog čega se narušava ravnoteža. Kad je gubitak energije izgubljene zračenjem mali u odnosu na ukupnu energiju, temperatura tela opada relativno sporo, pa se uprkos njenoj promeni može smatrati da je zračenje ravnotežno i u skladu s trenutnom temperaturom T .

U nauci se obično umesto razmatranja složenog, stvarnog sistema posmatra pretpostavljeni, uprošćeni model. U fizičkoj hemiji je, na primer, poznat koncept idealnog gasa na osnovu čega se izvodi jednačina idealnog gasnog stanja koja samo približno opisuje ponašanje realnog gasa koji se tek na visokoj temperaturi i na niskom pritisku ponaša kao idealni. Tako se i teorijska razmatranja svih pojava vezanih za zračenje tela na određenim temperaturama odnose na ravnotežno zračenje i izvode na modelu *crnog tela*. Crno telo se definiše kao telo koje potpuno apsorbuje upadno zračenje, nezavisno od talasne dužine. Objasnimo ovo detaljnije.

Neka na telo pada, po jedinici površine u jedinici vremena i u okolini neke talasne dužine λ , gustina fluksa energije Φ_λ :

$$\Phi_\lambda St = \frac{dE}{d\lambda} \quad (3.1.1)$$

pri čemu je E energija, S površina, t vreme, a λ talasna dužina. Neko realno telo delimično apsorbuje, a delimično reflektuje upadno zračenje. Tada se apsorbovana gustina fluksa Φ'_λ definiše kao apsorbovana energija oko talasne dužine λ po jedinici površine tela u jedinici vremena. Odnos apsorbovane i upadne gustine fluksa, predstavlja sposobnost tela da apsorbuje zračenje date talasne dužine λ , označava se sa A_λ a naziva se spektralna apsorpcija:

$$A_\lambda = \frac{\Phi'_\lambda}{\Phi_\lambda} \quad (3.1.2)$$

A_λ je neimenovani broj koji za realna tela zavisi od talasne dužine i uvek je manji od jedinice. Crno telo apsorbuje u potpunosti celokupno zračenje koje padne na njega, pa je u tom slučaju $A_\lambda = 1$ za svako λ .

Spektralna emisiona sposobnost – ekscitancija M_λ definiše se kao energija koju telo emituje sa jedinice površine u jedinici vremena u okolini neke talasne dužine λ .

Vezu između apsorpcione i emisije spektralne sposobnosti tela izražava Kirchofov (Kirchoff Gustav Robert, 1824–1887) zakon, po kojem je odnos apsorpcione i emisije spektralne sposobnosti tela nezavisan od prirode tela i potpuno je određen spektralnom raspodelom zračenja u stanju ravnoteže na određenoj temperaturi:

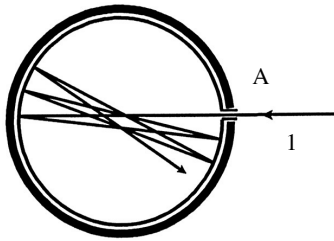
$$\frac{M_\lambda}{A_\lambda} = f(\lambda, T). \quad (3.1.3)$$

Ova jednačina, takođe, pokazuje to da telo koje više apsorbuje, više i emituje. Za apsolutno crno telo je $A_\lambda = 1$ za sve talasne dužine, pa iz (3.1.3) sledi:

$$M_\lambda = f(\lambda, T). \quad (3.1.4)$$

To znači da je spektralna ekscitancija crnog tela, M_λ jedinstvena funkcija temperature i talasne dužine. Ovaj zakon Kirhof je postavio 1859. godine polazeći od termodinamičkih principa.

U prirodi ne postoji telo sa osobinama koje u potpunosti odgovaraju crnom telu. Na primer, telo pokriveno slojem čadi ima $A_\lambda = 1$ samo u ograničenom intervalu talasnih dužina. Crno telo, međutim, može dobro da se predstavi šupljinom koja je okružena ravnomerno zagrejanim zidovima (npr. šupljina ravnomerno zagrejane laboratorijske peći), Slika 3.1.1. Tada se ravnotežno zračenje, koje se uspostavlja u šupljini, odlikuje spektralnom raspodelom energije koja je identična raspodeli za apsolutno crno telo.

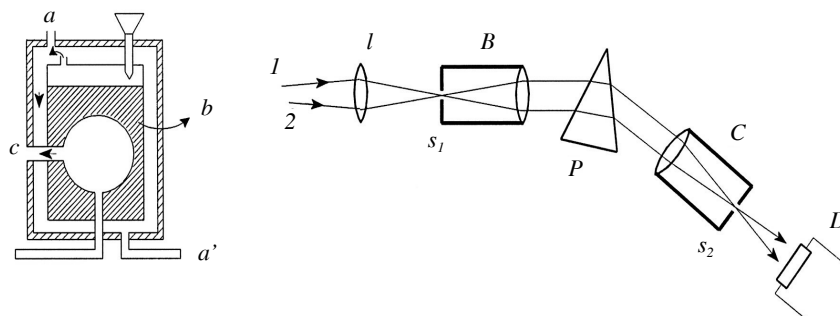


Slika 3.1.1 Šupljina kao crno telo. Zrak ulazi kroz mali otvor u šupljinu iz koje može da izađe tek posle niza refleksija. Kako se pri jednoj refleksiji odbije k -ti deo fluksa, posle n refleksija odbijen je k^n -ti deo prvobitnog fluksa. Pošto je k manje od jedinice, za dovoljno veliki broj refleksija k^n je približno nula, pa je apsorpciona sposobnost bliska jedinici za svaku talasnu dužinu.

3.1.1 Eksperimentalno proučavanje zračenja crnog tela

Ravnomerno zagrejana šupljina u praksi predstavlja model crnog tela. Kroz mali otvor na šupljini oslobađa se zračenje koje se zatim analizira. Na Slici 3.1.2 (levo) kao model crnog tela, po zamisli Lumera (Lummer) i Pringshajma (Pringsheim), uzet je cilindar s dvostrukim zidovima. Prostor između zidova korišćen je kao termostat za održavanje stalne temperature u svim delovima suda. Ovo je ostvareno proticanjem pare ključale vode za visoke temperature, odnosno tečnog vazduha za niske temperature, između zidova cilindra. Pomoću aparature kao na Slici 3.1.2 (desno) izvršeno je spektralno razlaganje emitovanog zračenja. Zračenje crnog tela prvo se fokusira pomoću sočiva l na razrez s_1 kolimatora B . Ovim sočivom postiže se „obasjavanje” prizme snopom paralelnih zraka. Prizma skreće zrake različitih talasnih dužina u različitim pravcima u skladu sa zakonima prelamanja. Pri određenom položaju durbina C kroz pukotinu s_2 prolazi zračenje iz opsega talasnih dužina od λ_1 do $\lambda_1 + \Delta\lambda_1$. Ovo zračenje pada zatim na detektor (u ovim prvim eksperimentima bio je to nagraavljeni termoelement) koji meri gustinu fluksa zračenja. Pri nekom drugom položaju durbina meri se gustina fluksa zračenja u okolini talasne dužine λ_2 , tačnije u opsegu talasnih dužina od λ_2 do $\lambda_2 + \Delta\lambda_2$.

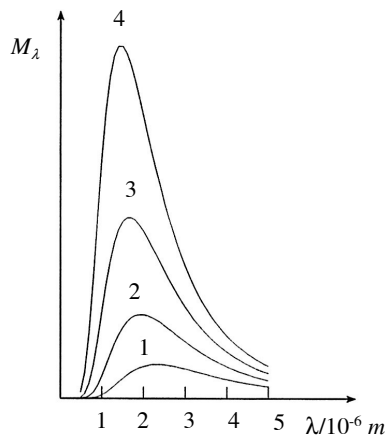
Rezultati ovakvog merenja, zatim, su grafički predstavljani u pravougloj koordinatnom sistemu, pri čemu se na ordinatu nanosi spektralna ekscitancija M_λ , a na apscisu talasna dužina λ i tako za nekoliko temperatura. Dobijaju se krive koje predstavljaju eksperimentalnim putem određenu zavisnost $M_\lambda(\lambda, T)$, T je apsolutna temperatura i važe za crno telo (Slika 3.1.3). Uočava se to da spektralna ekscitancija (emisiona sposobnost) raste s porastom temperature, pri čemu se apscise maksimuma krivih s porastom temperature pomeraju ka kraćim talasnim dužinama. Na nižim temperaturama vrednosti λ leže u oblasti većih talasnih dužina, pa telo emi-



Slika 3.1.2 Uređaj za analizu zračenja crnog tela: (levo) crno telo prema izradi Lumera i Pringshajma. Pumpa, pomoću koje se menja pritisak u aparaturi, spojena je na priključke a odnosno a' . Tečni vazduh označen je sa b , a zračenje iz šupljine posmatra se kroz mali otvor c ; (desno) aparatura za spektralno razlaganje zračenja. Sočivo l fokusira zračenje crnog tela (zraci 1 i 2) i usmerava ga na razrez s_1 kolimatora B , odakle dopire do prizme P , koja vrši spektralno razlaganje. Kolimator C služi za usmeravanje dobijenog spektra na detektor D .

tuje pretežno infracrveno zračenje (zračenje čija je talasna dužina reda veličine stotine mikrona). Krive sličnog toka dobijaju se kada se na ordinati predstavi spektralna gustina energije u_λ koja se definiše kao energija koju emituje jedinična zapremina crnog tela u okolini talasne dužine λ (dimenzije J m^{-4}):

$$u_\lambda = \frac{du}{d\lambda} \Rightarrow u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda.$$



Slika 3.1.3 Eksperimentalno dobijena zavisnost spektralne ekscitancije crnog tela od talasne dužine na različitim temperaturama. Krivama 1, 2, 3 i 4 odgovaraju temperature od 977, 1227, 1477 i 1727 °C, redom. M_λ se asimptotski približava nuli za male talasne dužine.

Spektralnu gustinu energije crnog tela možemo da definišemo i oko neke frekvencije ν i tada je označavamo sa u_ν (dimenzije $\text{J m}^{-3} \text{ s}$). Veza između u_λ i u_ν dobija se iz sledećih jednačina:

$$u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda$$

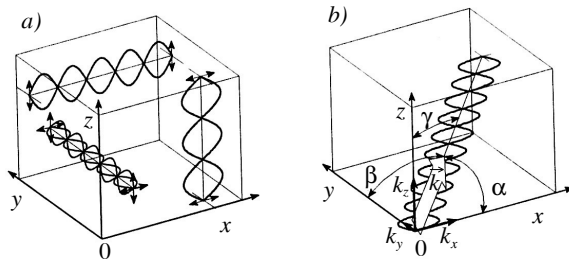
$$v = \frac{c}{\lambda}, \quad |dv| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

gde je c brzina svetlosti. Iz prethodnih jednačina sledi:

$$u_v \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = u_\lambda d\lambda \quad \text{ili} \quad u_v = u_\lambda \frac{\lambda^2}{c}. \quad (3.1.5)$$

3.1.2 Zakoni zračenja crnog tela

Neke od osobina krivih $M_\lambda = f(\lambda, T)$ sažete su u obliku zakona zračenja. **Stefan-Bolcmanov zakon** glasi:



Slika 3.1.4 Stojće talasi: a) stojći talas usmeren duž x (y , z)-ose; b) stojći talas usmeren u proizvoljnom pravcu. (Talasni vektor s koordinatnim osama, x , y i z zaklapa uglove α , β i γ , redom.)

ekscitancija M apsolutno crnog tela proporcionalna je četvrtom stepenu temperature tela T :

$$\int_0^\infty M_\lambda d\lambda = M_e = \sigma T^4 \quad (3.1.6)$$

pri čemu je σ konstanta proporcionalnosti koja po najnovijim merenjima ima vrednost $5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Na Slici 3.1.3 ekscitancija M predstavlja površinu ispod krive $M_\lambda = f(\lambda)$ za neku određenu temperaturu T . Do ovog zakona Štefan je došao eksperimentalnim putem 1879, dok ga je Bolcman 1884. objasnio teorijski. Vinov zakon pomeranja (Wilhelm Wien, 1864–1928, dobio Nobelovu nagradu za fiziku 1911), daje vezu između temperature T i apscise maksimuma krivih $M_\lambda = f(\lambda, T)$:

$$\lambda_{max} = \frac{c'}{T}. \quad (3.1.7)$$

Zakon tvrdi da je talasna dužina koja odgovara maksimumu spektralne ekscitancije tela, obrnuto proporcionalna apsolutnoj temperaturi T pri čemu je $c' = 0,00289 \text{ Km}$. Tako na 5000 K maksimum krive leži u žuto-zelenoj oblasti spektra pri $\lambda_{max} = 577 \text{ nm}$.

3.1.3 Rejli-Džinsov i Vinov zakon zračenja

Pri proučavanju zračenja crnog tela postavio se pred naučnike problem teorij-skog objašnjenja eksperimentalnim putem utvrđene spektralne raspodele zračenja predstavljene funkcijama $M_\lambda = f(\lambda, T)$ odnosno $u_\nu = F(\nu, T)$. Oslanjajući se na zakone klasične fizike, Rejli i Džins (J. W. Reyleigh, 1842–1919; J. H. Jeans 1887–1946) su oko 1900. godine, odredili spektralnu raspodelu zračenja crnog tela. Rejli-Džinsova jednačina zračenja crnog tela **nije** bila tačna i samo se u graničnim slučajevima, za velike talasne dužine i visoke temperature, pomoću nje tačno mogla da izračuna energija zračenja. Ipak, ova teorija, pokazujući slabosti i ograničenja klasične fizike, ukazivala je i na način za prevazilaženje ovih ograničenja. Proračun spektralne raspodele zračenja crnog tela sastojao se iz dva dela. U prvom delu Rejli je „prebrojao” elektromagnetne talase određenih frekvencija ν koji nastaju u šupljini kojom predstavljamo crno telo, a u drugom delu pripisao svakom od talasa određenu srednju energiju E_{sr} . Spektralna gustina energije koja nastaje u šupljini tada je jednaka proizvodu broja talasa s frekvencijom ν u okolini ν i srednje energije po jednom talasu.

Rejli-Džinsova teorija zračenja crnog tela zasnovana je na sledećim razmatranjima. Neka je crno telo zatvorena, evakuisana šupljina oblika kocke zapremine V , okružena zidovima na temperaturi T koji idealno odbijaju zračenje. Prema Maksvelovoj (Maxwell James Clerk, 1831–1879) elektromagnetnoj teoriji, elektromagnetno zračenje pobuđuje se oscilovanjem električnih dipola (dipol se sastoji iz dva naelektrisanja jednaka po količini, a suprotnog znaka). Tako, oscilovanjem električnih dipola zidova šupljine, u njoj nastaje elektromagnetno polje koje se odlikuje jačinama električnog, \vec{E} i magnetnog polja \vec{H} i gustinom energije u (pogledati i poglavlje 9.3 o zračenju atoma):

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \vec{H} \cdot \vec{H}$$

pri čemu je c brzina svetlosti u vakuumu, a ϵ_0 njegova električna propustljivost. Elektromagnetno polje u šupljini čine elektromagnetni talasi različitih učestanosti (frekvencija) i spektralne gustine u_ν . Elektromagnetne talase nastale u šupljini razložićemo na elementarne (stojeće) talase različitih frekvencija i različitih pravaca. Uzećemo, takođe, da svakom stojećem talasu odgovara neka srednja energija E_{sr} koja je jednaka, što se dokazuje u elektrodinamici, srednjoj energiji linearnog oscilatora čijim je oscilovanjem ovo zračenje pobuđeno. Tada je spektralna energija zračenja crnog tela u_ν jednaka proizvodu broja stojećih talasa s frekvencijama između ν i $\nu + \Delta\nu$ i srednje energije E_{sr} . Istaknimo da broj stojećih talasa frekvencije ν odgovara broju oscilatora frekvencije ν čijim su oscilovanjem pobuđeni ovi talasi. Posmatrajmo, dakle, stojeće talase koji nastaju u kocki ivice a . Koordinatni sistem postavljamo kroz ivice kocke, Slika 3.1.4, a posmatramo talas koji se širi u pozitivnom smeru x -ose, reflektuje na stranicama kocke koje su paralelne zy zidovima stvarajući stojeći talas. Uslov za nastanak ovakvog stojećeg talasa talasne dužine λ u kocki ivice a je:

$$a = n \frac{\lambda}{2} \quad (3.1.8)$$

pri čemu je $n = 0, 1, 2$. Uslovom (3.1.8) kažemo da se na zidovima talasi „gase”, dok je rastojanje između zidova takvo da između njih može da se smesti celi broj polovina talasnih dužina. Slični uslovi važe za stojeće talase koji se prostiru u smeru y - i z -ose.

Posmatrajmo sada opštiji slučaj. Neka se ravni talas širi u pravcu koji sa x -, y - i z -osom zaklapa redom uglove α , β i γ , Slika 3.1.4. Ovo je istovremeno i pravac talasnog vektora \vec{k} ravnog talasa kojeg prikazujemo jednačinom (videti jednačinu D-3.1.13):

$$s_1 = A e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = A e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (3.1.9)$$

pri čemu je ω ugaona frekvencija, t vreme, \vec{r} radijus vektor bilo koje tačke na ekvifaznoj ravni, a \vec{k} je talasni vektor. Talas reflektovan zidovima kocke prostire se u suprotnom smeru i prikazujemo ga funkcijom:

$$s_2 = B e^{-i(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.1.10)$$

Slaganjem talasa s_1 i talasa s_2 nastaje talas s . Uvešćemo granični uslov takav da je funkcija $s = 0$ u svakom trenutku vremena t za $x, y, z = 0$. Kad u jednačinama (3.1.9) i (3.1.10) umesto r , odnosno x, y, z stavimo vrednosti nula, dobijamo vezu između funkcija s_1 , s_2 i s , odnosno koeficijenata A i B da bi postavljeni granični uslov bio zadovoljen:

$$s = 0 = e^{i\omega t}(A + B) \Rightarrow A = -B \Rightarrow s = s_1 + s_2 \quad (3.1.11)$$

Eksponencijalnu funkciju s pretvorićemo sada u trigonometrijski oblik pomoću Ojlerove formule:

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} s = s_1 + s_2 &= A^{i\omega t} [\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) - \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] \\ &= -2i A e^{i\omega t} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (3.1.11a)$$

Drugi uslov koji obezbeđuje da talas ostane „zatvoren” u zapremini kocke je:

$$s = 0 \quad \text{za} \quad x, y, z = a$$

što je ispunjeno kad je:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = n\pi \Rightarrow k_x a + k_y a + k_z a = n\pi \Rightarrow \quad (3.1.12)$$

$$k_x a = n_1 \pi; \quad k_y a = n_2 \pi; \quad k_z a = n_3 \pi \quad (n_1 + n_2 + n_3 = n)$$

gde su n , n_1 , n_2 i n_3 celi brojevi. Ovakav talas, pošto je ograničen na određenu zapreminu, ne može se smatrati progresivnim već predstavlja vrstu oscilatornog procesa zarobljenog u kocki. Kad se uzme u obzir da je intenzitet talasnog vektora:

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.1.13)$$

i da je:

$$\cos \alpha = \frac{k_x}{|\vec{k}|} \Rightarrow k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha; \quad \cos \beta = \frac{k_y}{|\vec{k}|} \Rightarrow k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta; \quad (3.1.14)$$

$$\cos \gamma = \frac{k_z}{|\vec{k}|} \Rightarrow k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$$

uslovi definisani jednačinom (3.1.12) postaju:

$$\begin{aligned} a \cos \alpha &= n_1 \frac{\lambda}{2} \\ a \cos \beta &= n_2 \frac{\lambda}{2} \\ a \cos \gamma &= n_3 \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Rešimo sada (3.1.15) po n_1 , n_2 i n_3 , zamenivši prethodno λ jednakošću c/v (c je brzina svetlosti). Dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{2a}{c} v \cos \alpha \\ n_2 &= \frac{2a}{c} v \cos \beta \\ n_3 &= \frac{2a}{c} v \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3.1.15a)$$

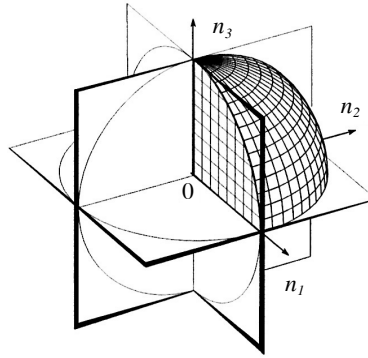
Jednačine (3.1.15) i (3.1.15a) pokazuju da tri broja (n_1 , n_2 i n_3) određuju svaki pojedini talas koji ima frekvenciju v . Dignimo na kvadrat svaku od prethodnih jednačina, a zatim ih međusobno saberemo:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4a^2}{c^2} v^2. \quad (3.1.16)$$

Jednačina (3.1.16) ne sadrži više kosinuse uglova jer je $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Zamenimo sada u jednačini (3.1.16) brojeve n_1 , n_2 i n_3 promenljivim x , y i z . Dobijamo izraz koji je jednak jednačini sfere poluprečnika R ($= 2av/c$):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad R = \frac{2a}{c} v. \quad (3.1.17)$$

Pridružujući promenljivim x , y i z niz celih brojeva $0, 1, 2, 3, \dots$ izdělčemo prostor ovakve sfere na niz kocki jedinične zapremine. Temena takvih kocki imaju koordinate (n_1, n_2, n_3) a kako je svako teme (ima ih osam) zajedničko za osam susednih kocki, to je svaka kocka jedinične zapremine određena sa tri broja (n_1, n_2, n_3) . Kako



Slika 3.1.5 Uz izvođenje Džinsove formule.

jednom stojećem talasu odgovara trojka brojeva (n_1, n_2, n_3) , to znači da jedna jedinična kocka predstavlja jedan stojeći talas. Zbir zapremine svih elementarnih kocki, kad je λ dovoljno malo u poređenju s dimenzijama kocke, jednak je **jednoj osmini** zapremine sfere određene uslovom (3.1.17). Faktor $1/8$, kojeg je uveo Džins, potreban je zato što uračunavamo samo kocke koje leže u prvom oktantu, Slika 3.1.5. Kako je reč o kockama jedinične zapremine, to je ova zapremina istovremeno jednaka broju elementarnih kocki. Kako je svaka kocka određena trojkom brojeva n_1, n_2, n_3 , a svakoj trojki brojeva odgovara jedan stojeći talas, ovo je istovremeno i broj stojećih talasa N s frekvencijama od 0 do v :

$$N = \frac{14}{83} \pi R^3.$$

Uzimajući u obzir (3.1.17) dobija se:

$$N = \frac{4}{3} \pi \frac{a^3}{c^3} v^3. \quad (3.1.18)$$

Za $a = 1$, odnosno pri jediničnoj zapremini:

$$n = \frac{4}{3} \pi \frac{v^3}{c^3}. \quad (3.1.18a)$$

Broj stojećih talasa s frekvencijama između v i $v + \Delta v$ jednak je $1/8$ zapremine sferne ljuske debljine dR i radijusa R i izračunava se diferenciranjem po v jednačine (3.1.18):

$$dN = \frac{1}{8} 4\pi R^2 dR = 4\pi \frac{a^3}{c^3} v^2 dv.$$

Za jediničnu zapreminu izraz se pretvara u:

$$dn = \frac{4\pi v^2}{c^3} dv. \quad (3.1.19)$$

Kako je reč o transversalnim (poprečnim) talasima, a oni mogu da se slože od 2 linearne talasa koji stoje upravno jedan na drugi, jednačinu (3.1.19) ćemo pomnožiti sa 2:

$$dn = \frac{8\pi v^2}{c^3} dv \Rightarrow \frac{dn}{dv} = \frac{8\pi v^2}{c^3}. \quad (3.1.20)$$

Jednačinom (3.1.20) prikazan je **Rejlijev broj** ili broj oscilatora (broj stojećih talasa) čija je frekvencija u okolini v . Emitovanu energiju po jedinici zapremine, u opsegu frekvencija v i $v + \Delta v$, dobićemo kad broj stojećih talasa dn pomnožimo srednjom energijom oscilatora E_{sr} :

$$du = E_{sr} dn \Rightarrow$$

$$u_v dv = \frac{8\pi v^2}{c^3} E_{sr} dv. \quad (3.1.21)$$

Vrednost srednje energije oscilatora, Rejli je izračunao primenjujući teoremu statističke fizike o ravnomernoj raspodeli energije po stepenima slobode. Prema ovoj teoremi, svakom stepenu slobode kretanja odgovara jednaka srednja kinetička energija i ona iznosi $1/2 kT$, gde je k Bolcmanova konstanta, a T temperatura. Kako je srednja potencijalna energija oscilatora jednaka njegovoj srednjoj kinetičkoj energiji, to je ukupna energija oscilatora jednaka:

$$E_{sr} = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT. \quad (3.1.22)$$

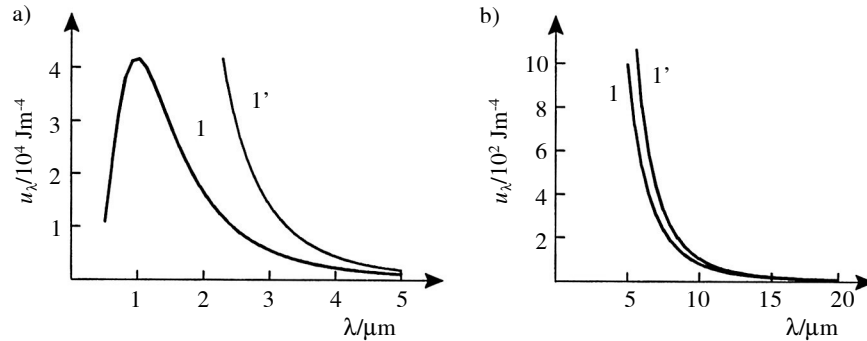
Iz (3.1.22) sledi da srednja energija oscilatora zavisi samo od temperature T , pa, prema tome, može kontinualno da se menja. Zamenjivanjem E_{sr} sa kT u (3.1.18) dobija se:

$$u_v dv = \frac{8\pi v^2}{c^3} kT dv \Rightarrow u_v = \frac{8\pi v^2}{c^3} kT. \quad (3.1.23)$$

Kad se u jednačini (3.1.23) frekvencija v zameni odnosom c/λ i uzme u obzir jednačina (3.1.5) dobija se drugi oblik Rejli-Džinsovog zakona:

$$u_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT. \quad (3.1.24)$$

Jednačinama (3.1.23) i (3.1.24) Rejli i Džins izrazili su raspodelu energije koja se emituje po jedinici zapremine crnog tela u okolini neke talasne dužine λ (odnosno frekvencije ν).



Slika 3.1.6 Spektalna gustina energije crnog tela kao funkcija talasne dužine na temperaturi od 3000 K: a) 1 – kriva dobijena eksperimentalnim putem; 1' – kriva nacrtana na osnovu Rejli-Džinsovog zakona; b) eksperimentalna i teorijska kriva praktično se poklapaju za veće talasne dužine.

Rejli-Džinsov zakon pokazuje slaganje sa eksperimentalno određenom spektralnom raspodelom zračenja crnog tela samo u oblasti **velikih** talasnih dužina i **visokih** temperatura. Za visoke frekvencije odnosno male talasne dužine, Rejli-Džinsova formula daje besmislene rezultate, pošto iz nje sledi da pod tim uslovima crno telo emituje beskonačnu energiju. Takođe, ukupna emitovana energija u celom opsegu frekvencija ν , prema Rejli-Džinsovom zakonu, beskonačna je:

$$\int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty.$$

Kako Rejli-Džinsov zakon dovodi do zaključka (koji je u suprotnosti sa eksperimentima) da najveći deo energije u spektru toplotnog zračenja leži u kratkotalasnom delu, P. Erenfest (Paul Ehrenfest, 1880–1933) naziva ovakvo stanje „ultravioletna katastrofa”.

Grafički prikaz Rejli-Džinsove jednačine, zajedno sa eksperimentalnom krivom, prikazan je na Slici 3.1.6.

Vin 1896. godine predlaže svoju jednačinu za energiju koju u jedinici zapremine oko neke talasne dužine λ emituje crno telo na temperaturi T :

$$u_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \quad (3.1.25)$$

pri čemu su c_1 i c_2 eksperimentalne konstante. Vinov zakon zračenja dobro tumači spektralnu raspodelu energije crnog tela samo u oblasti **malih** talasnih dužina i **niskih** temperatura.

Oba ova zakona, izvedena krajem 19. veka na osnovu principa klasične mehanike, tačno su prikazivala raspodelu zračenja crnog tela samo u **graničnim** oblastima spektra – ili za velike talasne dužine i temperature (Rejli-Džinsova formula) ili kod malih talasnih dužina i niskih temperatura (Vinova). Nijedna od njih, ni u najgrubljim crtama, nije mogla da protumači eksperimentalne rezultate u celom spektru zračenja crnog tela.

3.2 PLANKOV ZAKON ZRAČENJA

Problem raspodele energije u spektru zračenja apsolutno crnog tela razrešio je Maks Plank (Max Karl Ernst Ludwig Plank, 1858–1947, Nobelova nagrada za fiziku 1918), uvodeći 1900. godine smelu hipotezu koja je protivrečila celokupnom sistemu predstava klasične fizike. Plank je pretpostavio da je energija harmonijskog oscilatora koji osciluje frekvencijom ν , čime se pobuđuje zračenje, **diskretna** veličina. Takva diskretna veličina E izražava se onda kao celobrojni⁷ umnožak neke najmanje količine energije E_0 , $E = nE_0 = nh\nu$. Sa h je označena univerzalna konstanta, koja predstavlja **najmanje dejstvo** koje postoji u prirodi ($h = 6,62 \times 10^{-34}$ Js) i koja će kasnije u čast samoga Planka biti nazvana *Plankova konstanta*, n je ceo broj; vrednost proizvoda $h\nu$ označava elementarnu količinu, odnosno kvant energije. Plankova konstanta je univerzalna konstanta kvantne mehanike. U čisto klasičnoj teoriji materije ova konstanta se ne pojavljuje i zbog svoje male vrednosti nema značaja. O ovoj „novoj” konstanti sam Plank kaže:

*„Posle svih ovih rezultata⁸, iza kojih stoje mnoga zvučna imena, sudiji koji ne želi da se o činjenice ogлуši, ne ostaje nikakva druga mogućnost nego da u sistemu univerzalnih fizičkih konstanti prizna puno građansko pravo i kvantu dejstva koji se u svakoj od pojedinačnih, iz šarolikog mnoštva raznovrsnih pojava, pokazuje uvek kao ista veličina, oko $6,54 \times 10^{-27}$ erg.s. Mora izgledati neobično da je priroda, u isto vreme kada je misao o opštoj relativnosti prokrčila sebi put i postala opšteprihvaćena, baš na jednom mestu, gde se to najmanje moglo predvideti, stvorila nešto apsolutno, jednu stvarno nepromenljivu jedinicu mere, pomoću koje se u trenutku vremena sadržana veličina **dejstva** može predstaviti sasvim određenim, samovoljom prirode, odabranim brojem.”*

Prema tome, energije oscilatora mogu da budu:

$$E_0, 2E_0, 3E_0, \dots, nE_0, \dots;$$

odnosno:

$$h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$$

Kako frekvencija izračenog odnosno apsorbovanog zračenja odgovara frekvenciji oscilovanja oscilatora, crno telo emituje odnosno apsorbuje energiju **diskontinualno**, u **kvantima** energije. Polazeći od ove ideje, Plank je odredio novu vrednost srednje energije oscilatora.

Pretpostavio je da oscilatori mogu da imaju različite energije, pri čemu:

⁷ Ako za nulu energije uzmemo energiju nultog oscilatornog nivoa.

⁸ Plank misli na Ajnštajново tumačenje fotoefekta i specifičnih toplota čvrstih tela korišćenjem kvanta energije, na oglede Franka i Herca kao i na one u vezi sa x i γ zračenjem, smatrajući istovremeno da je kvantna hipoteza svoju najjaču potvrdu dobila izgradnjom atomske teorije Nilsa Bora.

N_0 oscilatora ima enrgiju 0,

N_1 oscilatora ima energiju $h\nu$,

N_2 oscilatora ima energiju $2h\nu$

N_i oscilatora ima energiju $ih\nu$.

Broj oscilatora N_m sa određenom energijom $E_m = mh\nu$ (za njih se kaže da su u određenom energijskom stanju), odredićemo pretpostavljajući klasičnu, Bolcmanovu, raspodelu oscilatora po energijama:

$$N_m = N_0 e^{-\frac{mh\nu}{kT}}; \quad m = 1, 2, 3, \dots, i.$$

U gornjoj jednačini k je Bolcmanova konstanta, T je temperatura, a e prirodni broj ($= 2.7182818$). Srednju energiju oscilatora E_{sr} izračunaćemo kao količnik ukupne energije E svih oscilatora i njihovog broja N :

$$E_{sr} = \frac{E}{N}. \quad (3.2.1)$$

Ukupna energija E može da se predstavi u obliku zbira proizvoda broja oscilatora s određenom energijom i energije oscilatora, s tim što se sumiranje vrši od nule do beskonačnosti:

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot N_0 + h\nu \cdot N_1 + 2h\nu \cdot N_2 + \dots + ih\nu \cdot N_i = \\ &= 0 + h\nu N_0 e^{-\frac{h\nu}{kT}} + \dots + ih\nu N_0 e^{-\frac{ih\nu}{kT}} \end{aligned}$$

ili kraće:

$$E = h\nu N_0 \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\frac{ih\nu}{kT}}. \quad (3.2.2)$$

Na sličan način odredićemo ukupni broj oscilatora N :

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_i = \\ &= N_0 + N_0 e^{-\frac{h\nu}{kT}} + \dots + N_0 e^{-\frac{ih\nu}{kT}} \end{aligned}$$

odnosno:

$$N = N_0 \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{ih\nu}{kT}}. \quad (3.2.3)$$

Kombinovanjem jednačina (3.2.1), (3.2.2) i (3.2.3) dobija se:

$$E_{sr} = h\nu \frac{\sum_i i e^{-\frac{ih\nu}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{ih\nu}{kT}}}.$$

Uvešćemo smenu $y = e^{-h\nu/kT}$, pa je tada:

$$E_{sr} = h\nu \frac{\sum_i i y^i}{\sum_i y^i}.$$

Pošto je $y < 1$, izraz u imeniocu predstavlja geometrijsku progresiju čiji je zbir:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y^i = \frac{1}{1-y}. \quad (3.2.4)$$

Brojilac može da se preuredi na sledeći način:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i y^i = y \frac{d}{dy} \left(\sum_{i=0}^{\infty} y^i \right).$$

Kad iskoristimo (3.2.4) dobijamo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i y^i = y \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1-y} \right) = \frac{y}{(1-y)^2}. \quad (3.2.5)$$

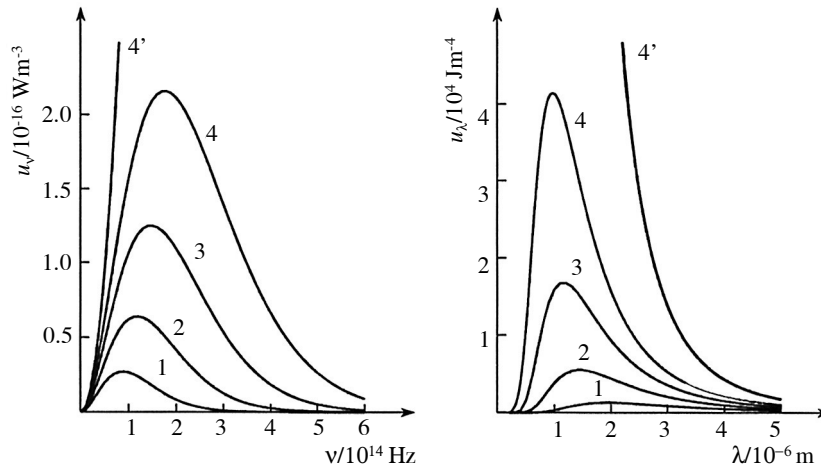
Prema tome, srednja energija oscilatora iznosi:

$$E_{sr} = h\nu \frac{y}{1-y}$$

ili ako umesto y ponovo napišemo $e^{-h\nu/kT}$:

$$E_{sr} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (3.2.6)$$

Energiju u_ν , koju po jedinici zapremine u okolini neke frekvencije ν emituje crno telo, dobićemo kad broj oscilatora frekvencije ν pomnožimo Plankovim izrazom za srednju energiju oscilatora, jednačina (3.2.6), umesto sa kT što je klasični izraz za



Slika 3.2.1 Krive od 1 do 4 predstavljaju Plankov zakon zračenja pri temperaturama od 1500, 2000, 2500 i 3000 K, redom. Krivom 4' prikazan je Rejli-Džinsov zakon na temperaturi od 3000 K; (levo) prikaz jednačine (3.2.7). Rejli-Džinsova funkcija poklapa se s Plankovom funkcijom samo u oblasti niskih frekvencija; (desno) prikaz jednačine (3.2.8). Rejli-Džinsova funkcija poklapa se s Plankovom funkcijom samo u oblasti velikih talasnih dužina.

srednju energiju oscilatora koju su koristili Rejli i Džins. Kao broj oscilatora Plank uzima istu onu vrednost koju su izračunali Rejli i Džins jer se pretpostavkom o kontinualnosti energije utiče na stepen pobuđenosti oscilatora, odnosno na njihovu srednju energiju ali ne i na njihov broj. Kombinujući (3.1.20) i (3.2.6) dobijamo:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

odnosno:

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (3.2.7)$$

Jednačina (3.2.7) predstavlja jedan od uobičajenih izraza **Plankovog zakona zračenja**. Uzimajući u obzir (3.1.5), dobija se Plankov zakon zračenja u drukčijem obliku:

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (3.2.8)$$

Grafički prikaz Plankovog zakona zračenja dat je na Slici 3.2.1a i 3.2.1b.

Plankov zakon zračenja, izveden uz pretpostavku da energije oscilatora mogu da budu samo diskretne, čime se podrazumeva da se energija emituje i apsorbuje diskontinualno (u kvantima), u potpunoj je saglasnosti s eksperimentalnim rezultatima koji se odnose na raspodelu energije u spektru zračenja crnog tela.

Iz Plankove jednačine, kao granični slučajevi, mogu da se izvedu Rejli-Džinsova i Vinova jednačina. Posmatrajmo, najpre, oscilatore koji osciluju vrlo niskim frekvencijama, npr. reda veličine herca. Tada su njihovi susedni energijski nivoi razmaknuti samo za oko 7×10^{-34} J, dakle leže vrlo blizu jedan drugom, pa im je i diskontinualnost praktično neuočljiva, Slika 3.2.2. Plankovu jednačinu, u ovom slučaju, možemo da izrazimo tako što eksponencijalni faktor $e^{h\nu/kT}$ razvijemo u Maklorenov red:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 + \dots$$

Pošto je $h\nu \ll kT$, dovoljno dobru aproksimaciju dobijamo ako se zadržimo samo na prva dva člana reda:

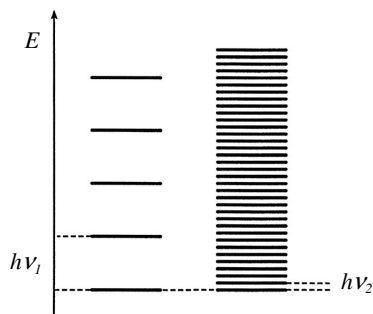
$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

pa je u_ν :

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

što predstavlja Rejli-Džinsovu jednačinu. Ovakav rezultat mogao je da se očekuje jer kad $h\nu \rightarrow 0$, kvantni nivoi leže toliko blizu jedan drugome da takoreći kontinualno prelaze jedan u drugi, pa mogu da se posmatraju i „klasično”, Slika 3.2.2 (desno).

Slika 3.2.2 Šematski prikaz energijskih nivoa oscilatora: (levo) kvantni nivoi oscilatora koji osciluje višom frekvencijom su razdvojeni i diskretnost energije je očigledna; (desno) kvantni nivoi oscilatora koji osciluje vrlo niskom frekvencijom toliko su bliski, pa oscilator može da se posmatra na „klasični” način.



Kod visokih frekvencija i niskih temperatura (što je oblast važenja Vinovog zakona), sledi da je $e^{h\nu/kT} \gg 1$, pa u imeniocu Plankove jednačine jedinica može da se zanemari. Tako Plankov zakon za visoke frekvencije i za niske temperature ima matematički oblik:

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}}.$$

U poslednjem slučaju kvanti energije su veliki, pa su susedni energijski nivoi oscilatora razmaknuti, Slika 3.2.2 (levo).

Napomenimo još jednom da je Plankova hipoteza o diskontinualnosti energije značila prekretnicu u razvoju moderne fizike i da je kasnije ugrađena u formalizam kvantne mehanike i kvantne elektrodinamike.

Primeri

Primer 3.2.1 Pokazati da važi jednačina $M = \pi I$ gde je M ekscitancija, a I intenzitet zračenja crnog tela.

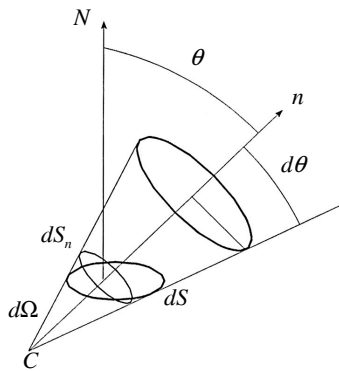
REŠENJE:

Intenzitet zračenja I definišemo kao količinu energije koja se u jedinici vremena izrači sa jedinične površine u pravcu normale na površinu u jedinični prostorni ugao. Posmatrajmo zračenje sa elementa površine dS , Slika 3.2.3, u smeru n [pri čemu je $\angle(n, N) = \theta$], obuhvaćeno diferencijalnim elementom prostornog ugla $d\Omega$. Tada, prema Lamberovom zakonu, u označenom smeru efikasno zrači površina dS_n koja je jednaka projekciji površine dS na pravac normalan na n :

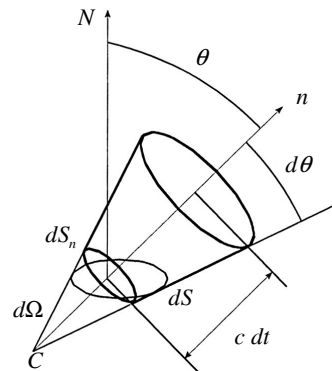
$$dS_n = dS \cos\theta$$

pa je:

$$I = \frac{dE}{\cos\theta \, dS \, d\Omega \, dt}. \quad (3.2.9)$$



Slika 3.2.3 Posmatra se zračenje koje se emituje u smeru normale n u prostorni ugao $d\Omega$. Efektivno zrači površina dS_n .



Slika 3.2.4 Posle izvesnog vremena dt izračena energija nalazi se u zapremini valjka visine $c dt$ a osnovice dS_n .

Prema definiciji, eksitanciju crnog tela M dobijamo integraljenjem jednačine (3.2.9) po celom prostoru. Prostorni ugao koji se definiše kao količnik površine elementa sfere i kvadrata radijusa sfere jednak je $d\Omega = \sin\theta d\varphi$ (θ je ugao između radius vektora normalnog na element površine i z -ose, a φ je azimutni ugao, dakle ugao između projekcije radius vektora na xy -ravan i x -ose), pa je:

$$M = \int I \cos\theta d\Omega = I \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi I \quad (3.2.10)$$

jer je:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2}.$$

Primer 3.2.2 Dokazati da između intenziteta zračenja crnog tela I i energije koju crno telo izrača po jedinici zapremine u postoji veza:

$$u = \frac{4\pi}{c} I \quad (3.2.11)$$

gde je c brzina svetlosti.

REŠENJE:

Sa površine dS za vreme dt izrača se u smeru n , koji s normalom na dS , N , zaklapa ugao $\theta + d\theta$, u elementarni prostorni ugao $d\Omega$, energija dE , Slika 3.2.4

$$dE = I \cos\theta d\Omega dS dt.$$

Posle vremena dt ova energija naći će se u zapremini:

$$dV = c dt dS_n$$

gde je c brzina svetlosti. Gustina zračenja energije je tada:

$$du = \frac{dE}{dV} = \frac{I \cos\theta dS d\Omega dt}{c dt dS_n} = \frac{I}{c} d\Omega$$

jer je $dS \cos\theta = dS_n$. Posle skraćivanja i integraljenja dobijamo:

$$u = \frac{I}{c} \int_0^{\pi} d\Omega = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{c} I.$$

Ako je reč o potpunom nepolarizovanom zračenju važi jednačina:

$$u = \frac{8\pi}{c} I$$

jer je nepolarizovani zrak, u pogledu prenošenja energije, ekvivalentan s dva zraka istog intenziteta, koji su polarizovani u dvema uzajamno normalnim ravnima.

Primer 3.2.3 Izvesti Stefan-Bolcmanov zakon pomoću Plankovog zakona zračenja i odrediti vrednost Stefan-Bolcmanove konstante.

REŠENJE:

Ukupna gustina energije zračenja apsolutno crnog tela je:

$$u = \int_0^{\infty} u_{\nu} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 e^{\frac{-h\nu}{kT}}}{1 - e^{\frac{-h\nu}{kT}}} d\nu.$$

Kako je:

$$\frac{1}{1 - e^{\frac{-h\nu}{kT}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nh\nu}{kT}}$$

zbir geometrijske progresije, sledi:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^3 e^{\frac{-h\nu}{kT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nh\nu}{kT}} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-nh\nu}{kT}} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \nu^3 e^{\frac{-nh\nu}{kT}} d\nu.$$

(Smatramo da je dozvoljeno izvući sumu ispred znaka integracije.) Posle parcijalnog integraljenja dobija se:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Kako je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

dobija se:

$$u = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4.$$

Na osnovu (3.2.9) i (3.2.10) sledi da je:

$$M = \frac{c}{4} u.$$

Na osnovu toga je:

$$M = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = \frac{2\pi^5 \left(1,38066 \times 10^{-23} \frac{J}{K}\right)^4}{15 \left(2,997925 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 \times (6,62618 \times 10^{-34} Js)^3}$$

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} Wm^{-2} K^{-4}.$$

Primer 3.2.4 Odrediti broj kvanata talasne dužine od 500 do 520 nm, koje zrači crno telo zapremine $1cm^3$ na temperaturi od 2000 K.

REŠENJE:

Energiju koju, po jedinici zapremine, zrači crno telo u opsegu talasnih dužina λ i $\lambda + d\lambda$ (pogledati jednačinu 3.2.8) je:

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda.$$

U našem slučaju uzećemo za λ srednju vrednost, dakle 510 nm, a za $d\lambda = \Delta\lambda = 10$ nm, pa je:

$$u_\lambda \times \Delta\lambda = 8\pi \frac{(6,626 \times 10^{-34} Js) \times \left(2,998 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)}{(510 \times 10^{-9} nm)^5} \times$$

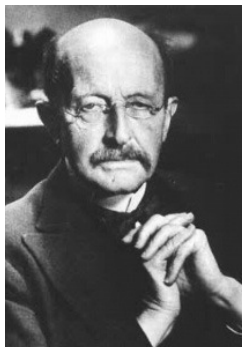
$$\times \frac{1}{\exp\left(\frac{6,626 \times 10^{-34} Js \times \left(2,998 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)}{(510 \times 10^{-9} m) \times \left(1,381 \times 10^{-23} \frac{J}{K}\right) \times (2000K)}\right) - 1} \times 10 \times 10^{-9} m$$

ili:

$$u_{\lambda} \Delta \lambda = \frac{0,145 \times 10^8}{e^{14,102} - 1} = 1,086 \times 10^{-7} \frac{J}{m^3}.$$

Jedan foton nosi energiju hc/λ , pa je broj fotona n :

$$n = \frac{u_{\lambda} \cdot \Delta \lambda}{h \cdot \frac{c}{\lambda}} = \frac{\left(1,086 \times 10^{-7} \frac{J}{m^3}\right) \times (510 \times 10^{-9} m)}{(6,626 \times 10^{-34} Js) \times (2,998 \times 10^8 m)} = 2,78 \frac{\text{fotona}}{cm^3}.$$



Maks Ernst Ludvig Plank (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947), rođen je u Kilu (Nemačka), a diplomirao je na Berlinskom univerzitetu. Doktorirao je u 21. godini s tezom iz termodinamike. Godine 1885. postao je profesor na Kilskom univerzitetu, a 1889. profesor teorijske fizike na Berlinskom univerzitetu. U okviru termodinamičkih istraživanja počeo je da se bavi problemom toplotnog zračenja i godine 1899. još uvek smatrajući da je Vinova radijaciona jednačina ispravna, otkrio je novu prirodnu konstantu – Plankov kvant dejstva. Godine 1900. postavio je jednačinu koja je ispravno opisivala zakon zračenja crnog tela. Dan kad je Plank otkriće ove jednačine saopštio Nemačkom fizičkom društvu, 14. decembar 1900, smatra se, „rodendanom kvantne teorije”. Godine 1918. dobio je Nobelovu nagradu za fiziku, za otkriće energijskih kvantova.

Vilhelm Vin (Wilhelm Wien, 1864–1928), rođen je u Gafkenu (Nemačka) i bio je profesor u Ahenu, Gisenu, Virzburgu i Minhenu. Još dok je bio Helmholtcov asistent, 1893. godine, otkrio je zakon pomeraja. Godine 1896. objavio je (mada samo približno tačan) zakon zračenja crnog tela. Nobelovu nagradu za fiziku dobio je 1911. godine za otkrića u vezi sa zakonima zračenja toplote.



Lord Džon Vilijams Strut Rejli (John Williams Strutt, 3rd baron Rayleigh, 1842–1919), rođen je u Langford Grovu. Bio je profesor u Kevendišovoj laboratoriji u Kembridžu (1879–1884) i u Kraljevskom društvu u Londonu (1884–1905). Između ostalog, ispitivao je intenzitet zvuka mereći pritisak na pokretnoj pločici (Rejljev disk), zaključio da plava boja neba potiče od rasejanja svetlosti na molekulima u vazduhu (Rejljevo rasejanje) i godine 1905. postavio zakon zračenja poznat kao Rejli-Džinsov zakon, koji predstavlja specijalni slučaj Plankovog zakona. Neslaganja u merenju brzine zvuka u azotu dovela su njega i Remzija do otkrića argona 1894. godine. Nobelovu nagradu za fiziku dobio je 1904. godine za istraživanje gustine najvažnijih gasova i za otkriće argona u vezi s tim ispitivanjima.