

## 7. FOTON – ELEKTROMAGNETNI KVANT

### 7.1 FOTOELEKTRIČNI EFEKT

#### DODATAK 7.1

##### D-7.1 Klasična i kvantne statistike

Klasični zakon raspodele čestica po energijama postavili su J. Maksvel i L. Bolcman polazeći od sledećih pretpostavki:

a) Verovatnoća da određeni molekul A ima energiju  $\epsilon$ , nezavisna je od toga da li drugi molekuli B, C, D, ... imaju istu ili neku drugu vrednost energije – kao što je kod bacanja kocke verovatnoća svakog pojedinačnog rezultata pri bacanju nezavisna od prethodnog bacanja;

b) Prema klasičnoj statistici, verovatnoća da u jednom sistemu  $N$  čestica ima energiju između  $\epsilon$  i  $\epsilon + d\epsilon$  određena je brojem načina ostvarivanja ovog stanja;

c) Pretpostavlja se da čestice mogu da se razlikuju, a raspodela se određuje prema kriterijumu maksimalne verovatnoće.

#### *Primeri*

**Primer D-7.1.1** Na koliko načina pet čestica može da se raspodeli tako da dve imaju energiju  $\epsilon_1$ , a tri energiju  $\epsilon_2$ .

Čestice ćemo označiti brojevima: 1, 2, 3, 4, i 5. Tražena raspodela može da se ostvari na sledeće načine:

$\epsilon_1$	$\epsilon_2$
1 2	3 4 5
1 3	2 4 5
1 4	2 3 5
1 5	2 3 4
2 3	1 4 5
2 4	1 3 5
2 5	1 3 4
3 4	1 2 5
3 5	1 2 4
4 5	1 2 3 .

Ovih 10 načina može da se izračuna pomoću izraza:  $5! / (2! 3!) = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) / (2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 10$ .

**Primer D-7.1.2** Sistem se sastoji od tri čestice, a energija sistema je  $3u$ . Ako svaka čestica može da ima energiju  $0, u, 2u$ , odrediti najverovatniju raspodelu.

Prva mogućnost jeste da sve tri čestice imaju energiju  $u$ :  $w = 3!/3! = 1$ .

Druga mogućnost jeste da dve čestice imaju energiju  $0$ , a treća energiju  $3u$ . Kako čestice mogu da se razlikuju označavamo ih sa  $1, 2, 3$ , pa ovakva mogućnost može da se ostvari na tri načina: 1. način:  $1 (0) 2 (0) 3(3u)$ ; 2. način:  $1 (0) 2 (3u) 3 (0)$ ; 3. način:  $1 (3u) 2 (0) 3 (0)$ . Ova tri načina dobijamo pomoću jednačine  $w = (3!)/(1! 2!) = 3$ .

Treća mogućnost jeste da jedna čestica ima energiju  $0$ , druga  $u$ , a treća  $2u$ . Ovo može da se ostvari na šest načina pošto čestice mogu da se razlikuju: 1. način:  $1 (0) 2 (u) 3 (2u)$ ; 2. način:  $1 (0) 2 (2u) 3 (u)$ ; 3. način:  $1 (u) 2 (2u) 3(0)$ ; 4. način:  $1 (u) 2 (0) 3(2u)$ ; 5. način:  $1 (2u) 2 (0) 3 (u)$ ; 6. način:  $1 (2u) 2 (u) 3 (0)$ . Broj načina ostvarivanja ovakve raspodele  $w$  izračunava se po jednačini:  $w = 3!/(1! 1! 1!) = 6$ . Najverovatnija je treća raspodela jer može da se ostvari na više načina.

#### D-7.1.1 Bolcmanova raspodela

Podelimo celokupni prostor na male oblasti i označimo ih indeksima  $i = 1, 2, 3, \dots, i$ . U  $i$ -toj oblasti nalazi se  $N_i$  čestica sa energijom  $\epsilon_i$ . Svaka oblast sadrži  $g_i$  čelija, što znači da svaku česticu možemo da raspodelimo na  $g_i$  načina.  $G_i$  je statistička težina stanja  $\epsilon_i$  i predstavlja broj stanja iste energije. Izračunavamo sada verovatnoću  $w$  da:

$N_1$  čestica bude u oblasti 1, sa energijom  $\epsilon_1$ ,

$N_2$  čestica bude u oblasti 2, sa energijom  $\epsilon_2$ ,

$N_i$  čestica bude u oblasti  $i$ , sa energijom  $\epsilon_i$ .

Ova verovatnoća jednaka je:

$$w = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots N_i!} g_1^{N_1} g_2^{N_2} g_3^{N_3} \dots g_i^{N_i}. \quad (\text{D-7.1.1})$$

Izraz (D-7.1.1) podrazumeva da čestice mogu da se razlikuju. Potražimo sada prirodni logaritam izraza (D-7.1.1):

$$\ln w = \ln N! - \sum_i \ln N_i! + N_1 \ln g_1 + N_2 \ln g_2 + \dots + N_i \ln g_i \quad (\text{D-7.1.2})$$

i na njega primenimo Stirlingovu formulu koja važi kada je broj  $N$  veoma veliki:

$$\ln N! = N \ln N - N.$$

Tada se dobija:

$$\ln w = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i + \sum_i N_i \ln g_i. \quad (\text{D-7.1.3})$$

Potražimo maksimum raspodele, što znači  $d \ln w$ , uz uslov da su energija i ukupni broj čestica stalni:

$$\sum_i N_i = N \quad (\text{D-7.1.4}) \quad \sum_i N_i \epsilon_i = E. \quad (\text{D-7.1.5})$$

Takođe, važi:

$$\sum_i dN_i = 0 \quad (\text{D-7.1.4a}) \quad \sum_i \epsilon_i dN_i = 0. \quad (\text{D-7.1.5a})$$

Zbog uslova (D-7.1.4) i (D-7.1.5) kao i (D-7.1.4a) i (D-7.1.5a), sve varijacije (diferencijali) nisu nezavisne, što se uzima u obzir pomoću metode Lagranževih multiplikatora. Jednačina (D-7.1.4a) pomnoži se sa  $-\alpha$ , a jednačina (D-7.1.4b) sa  $-\beta$ , pa se dobija:

$$-\alpha \sum_i N_i - \beta \sum_i \epsilon_i dN_i = 0.$$

Prethodni izraz dodaje se na  $d \ln w$  i izjednačava s nulom:

$$d \ln w - \alpha \sum_i dN_i - \beta \sum_i \epsilon_i dN_i = 0. \quad (\text{D-7.1.6})$$

Izračunaćemo sada izraz (D-7.1.6), uzimajući u obzir (D-7.1.3):

$$\begin{aligned} \sum_i [-\ln N_i dN_i - dN_i + \ln g_i dN_i - \alpha dN_i - \beta \epsilon_i dN_i] = \\ \sum_i \left( \ln \frac{g_i}{N_i} - 1 - \alpha - \beta \epsilon_i \right) dN_i = 0. \end{aligned} \quad (\text{D-7.1.7})$$

Izraz (D-7.1.7) jednak je nuli kad se izraz u zagradi izjednači s nulom:

$$\ln \frac{g_i}{N_i} = \alpha + 1 + \beta \epsilon_i \quad (\text{D-7.1.8})$$

pa je, konačno, broj čestica  $N_i$  sa energijom  $\epsilon_i$ :

$$N_i = g_i e^{-1-\alpha} e^{-\beta \epsilon_i} = g_i A e^{-\beta \epsilon_i} (A = e^{-1-\alpha}). \quad (\text{D-7.1.9})$$

Konstante  $A$  i  $\beta$  odredićemo razmatranjem (Maksvelove) raspodele molekula jednoatomnog gasa po brzinama. Energija molekula zavisi od impulsa (brzine) ali i od položaja molekula u prostoru kad se on nalazi pod uticajem spoljašnjih sila (npr. Zemljine težce). Smatraćemo da energija, odnosno brzine mogu da se menjaju kontinualno, pa ćemo sa diskretnih veličina (energija npr.) preći na kontinualne i sume zameniti integralima. Broj molekula sa energijom u okolini  $\epsilon_i$  koji smo prema (D-7.1.9) izrazili kao diskretnu veličinu  $N_i$  napisaćemo u diferencijalnom obliku kao  $dN$ . Broj molekula  $dN$  čiji su položaji između  $r$  i  $r+dr$  ili u pravouglom koordinatnom sistemu između  $x+dx$ ,  $y+dy$  i  $z+dz$ , a brzine između  $v$  i  $v+dv$  ili u pravouglom sistemu između  $v_x+dv_x$ ,  $v_y+dv_y$  i  $v_z+dv_z$  proporcionalan je elementu zapremine (faznog) prostora  $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ :

$$dN = A e^{-\beta \epsilon_i} dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (\text{D-7.1.10})$$

pa broju stanja energije  $\epsilon_i$ ,  $g_i$  iz jednačine (D-7.1.9) odgovara veličina prostora brzina:

$$g_i \rightarrow dv_x dv_y dv_z \quad (\text{D-7.1.11})$$

odnosno:

$$\Sigma g_i = \iiint dv_x dv_y dv_z. \quad (\text{D-7.1.11a})$$

Ovakav element „zapremine” u sfernom koordinatnom sistemu ima oblik:

$$\iiint_{0 \ 0 \ 0}^{\infty \ \pi \ 2\pi} dv_x dv_y dv_z = \iiint v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{D-7.1.12})$$

Kako nas interesuje samo intenzitet brzine, integralićemo po uglovima  $\theta$  i  $\varphi$ :

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$$

pa se integral (D-7.1.12) svodi na:

$$4\pi \int_0^\infty v^2 dv. \quad (\text{D-7.1.12a})$$

Ukupan broj čestica  $N$  određujemo integraljenjem izraza (D-7.1.10), uz uzimanje u obzir (D-7.1.12a), kao i da je:

$$\int dx dy dz = V$$

$$N = 4A\pi V \int_0^\infty v^2 e^{\frac{-\beta m v^2}{2}} dv \quad (\text{D-7.1.13})$$

gde smo u (D-7.1.13) koristili da je kinetička energija  $\epsilon = mv^2/2$  ( $m$  je masa molekula). Izraz za ukupnu energiju ima oblik:

$$E = \frac{4Am\pi}{2} \int_0^\infty v^4 e^{\frac{-\beta m v^2}{2}} dv. \quad (\text{D-7.1.14})$$

Može da se pokaže da je:

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx} (v^3 e^{\frac{-\beta m v^2}{2}}) = 3 \int_0^\infty v^2 e^{\frac{-\beta m v^2}{2}} dv - \beta m \int_0^\infty v^4 e^{\frac{-\beta m v^2}{2}} dv.$$

Vrednost prvog integrala u navedenom izrazu je nula, pa sledi da je:

$$\begin{aligned} 3 \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv &= \beta m \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv \Rightarrow \\ \frac{3}{\beta m} &= \frac{\int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv}{\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv}. \end{aligned} \quad (D-7.1.15)$$

Kad se ukupna energija  $E$  [izraz (D-7.1.14)] podeli ukupnim brojem čestica  $N$  [izraz (D-7.1.13)], dobija se izraz (D-7.1.15) pomnožen sa  $3/mV$  ili:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2\beta V}. \quad (D-7.1.16)$$

Ako se setimo da je na osnovu kinetičke teorije gasova ukupna energija  $E = nkT$  ( $n=N/V$ ), gde je  $n$  broj molekula po jedinici zapremine,  $k$  Bolcmanova konstanta, a  $T$  apsolutna temperatura, tada se iz (D-7.1.16) dobija:

$$E = \frac{3N}{2} \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2} n \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{kT}. \quad (D-7.1.17)$$

Konstantu  $A$  određujemo rešavanjem integrala (D-7.1.13). Integral se izračunava parcijalnim integraljenjem:

$$\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \left[ u t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} t du; \quad \left[ u = v; du = dv; dt = v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \Rightarrow t = \frac{-kT}{m} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right] \quad (D-7.1.18)$$

$$= -v \frac{kT}{m} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Big|_0^{\infty} + \frac{kT}{m} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 0 + \frac{1}{2} \frac{kT}{m} \left( \frac{2\pi kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Napomenimo da je integral u drugom redu jednačine (D-7.1.18) Ojlerov integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (D-7.1.19)$$

Zamenom izračunatog integrala (D-7.1.18) kao i vrednosti  $\beta$ , prema (D-7.1.17) i (D-7.1.13), dobijamo  $A$ :

$$A = \frac{N}{V} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{D-7.1.20})$$

Kad se u jednačinu (D-7.1.10) unesu vrednosti konstanti  $A$  i  $\beta$  dobijamo Maksvel-Bolcmanov zakon raspodele molekula (jednoatomnog gasa) po brzinama:

$$dN = Vdn = 4\pi Vn \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (\text{D-7.1.21})$$

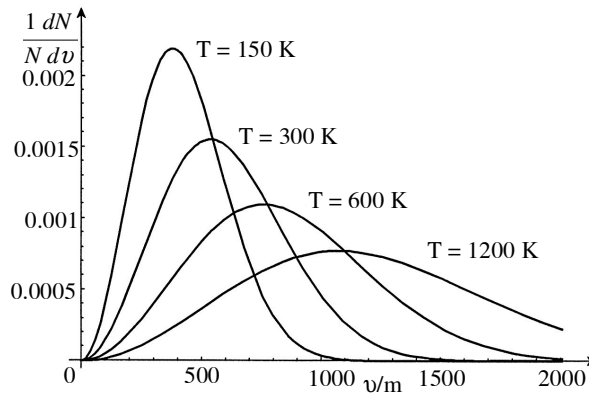
odnosno broj čestica  $dN$  (u odnosu na ukupan broj čestica  $N$ ) koje imaju brzine između  $v$  i  $v + dv$ . Koristeći vezu između kinetičke energije i brzine ( $\epsilon = mv^2/2$  i da je  $v^2 = \sqrt{2/m^3} \sqrt{\epsilon}$   $d\epsilon$ ) raspodelu po brzinama izražavamo kao zakon raspodele po energijama:

$$dN = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{m^3}} e^{\frac{-\epsilon}{kT}} \sqrt{\epsilon} d\epsilon. \quad (\text{D-7.1.22})$$

Maksvel-Bolcmanov zakon raspodele prikazan je na Slici D-7.1.1. Na ordinatu su nanete vrednosti, prema (D-7.1.21):

$$4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-mv^2}{2kT}} v^2 = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$$

u zavisnosti od brzine  $v$  za četiri različite temperature.



Slika D-7.1.1 Bolcmanov zakon raspodele.

### D-7.1.2 Boze-Ajnštajnova statistika

Statistike Boze-Ajnštajnova i Fermi-Dirakova su kvantne statistike. One uzimaju u obzir kvantovanost energije i za razliku od Maksvel-Bolcmanove statistike polaze od pretpostavke da čestice ne mogu da se razlikuju. Boze-Ajnštajnova statistika važi za čestice s celobrojnim spinom (to su npr. fotoni, atomi s parnim brojem čestica s polubrojnim spinom,

itd.). Prema Bornovom tumačenju talasne funkcije (videti poglavlja 8.4 i 9.2), pri permutaciji dveju identičnih čestica ne dobija se novo stanje.

**Primer D-7.1.3** Raspodeliti četiri čestice na tri ćelije tako da u jednoj budu tri čestice, u drugoj jedna, a u trećoj nijedna. Po Bolcmanovoj raspodeli, u ćelije a, b, c rasporedićemo čestice 1, 2, 3 i 4:

a	b	c
1 2 3	4	
1 2 4	3	
1 3 4	2	
2 3 4	1	

na četiri načina:  $4!(3! 1!) = 4$ . Postoje četiri stanja. Prema Boze-Ajnštajnovoj statistici postoji samo jedno stanje jer čestice ne mogu da se razlikuju.

Kao pri izvođenju Maksvel-Bolcmanove raspodele, celokupni prostor ćemo razdeliti na male oblasti koje obeležavamo indeksima  $i$ . U  $i$ -toj oblasti nalaziće se  $N_i$  čestica. Svaka oblast sadrži određeni broj elementarnih ćelija. U  $i$ -toj oblasti nalazi se  $g_i$  ćelija. Pitanje je na koliko različitih načina možemo da raspodelimo  $N_i$  čestica po elementarnim ćelijama  $i$ -te oblasti, pod pretpostavkom da čestice ne mogu da se razlikuju?

**Primer D-7.1.4** Raspodeliti četiri čestice na tri ćelije (a, b, c):

a b c	a b c	a b c	a b c
3 1 0	1 1 2	2 2 0	4 0 0
3 0 1	1 2 1	2 0 2	0 4 0
1 0 3	2 1 1	0 2 2	0 0 4
1 3 0			
0 3 1			
0 1 3			

Brojevi u ćeliji sada označavaju broj čestica, a ne samu česticu. Kao što vidimo, ukupni broj permutacija u našem primeru je 15, što se u opštem slučaju izražava jednačinom:  $g_i (g_i - 1 + N_i)!$ . Kako čestice ne možemo da razlikujemo:

$$\frac{g_i (g_i - 1 + N_i)!}{g_i! N_i!} = \frac{(g_i + N_i - 1)!}{(g_i - 1)! N_i!}.$$

Uzmimo da se u prvoj oblasti nalazi  $N_1$  čestica, u drugoj  $N_2$ , u trećoj  $N_3$ , . . . . Celokupni broj raspodela jednak je umnošku svih raspodela po pojedinim oblastima:

$$w_B = \prod_i \frac{(g_i + N_i - 1)!}{(g_i - 1)! N_i!}. \quad (\text{D-7.1.23})$$

Odredićemo prvo prirodni logaritam izraza (D-7.1.23):

$$\ln w_B = \sum_i \ln \frac{(g_i + N_i - 1)!}{(g_i - 1)! N_i!}.$$

i zatim zanemariti 1 i u brojiocu i imeniocu:

$$\ln w_B = \sum_i \ln \frac{(g_i + N_i)!}{g_i! N_i!}. \quad (\text{D-7.1.24})$$

Primenom Stirlingove formule na (D-7.1.24) dobijamo:

$$\ln w_B = \sum_i [(g_i + N_i) \ln(g_i + N_i) - g_i \ln g_i - N_i \ln N_i]. \quad (\text{D-7.1.25})$$

Uz uslov stalnosti broja čestica  $N$  i ukupne energije  $E$  [videti (D-7.1.4) i (D-7.1.5)] i pomoću metode Lagranževih multiplikatora (kao kod izvođenja Maksvel-Bolcmanove raspodele), najverovatniju raspodelu odredićemo iz izraza:

$$d \ln w_B - \alpha \sum_i dN_i - \beta \sum_i \epsilon_i dN_i = 0. \quad (\text{D-7.1.26})$$

Diferenciraćemo izraz (D-7.1.25) i zameniti ga u (D-7.1.26):

$$\sum_i \left[ \ln(g_i + N_i) dN_i + (g_i + N_i) \frac{1}{g_i + N_i} dN_i - \ln N_i dN_i - dN_i - \alpha dN_i - \beta \epsilon_i dN_i \right] = 0.$$

Prethodnu jednačinu ćemo malo srediti:

$$\sum_i \{ [\ln(g_i + N_i) - \ln N_i - \beta \epsilon_i - \alpha] dN_i \} = 0. \quad (\text{D-7.1.27})$$

Izraz (D-7.1.27) jednak je nuli kad je:

$$\ln \frac{g_i + N_i}{N_i} = \alpha + \beta \epsilon_i \Rightarrow \frac{g_i + N_i}{N_i} = e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \Rightarrow N_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} - 1}. \quad (\text{D-7.1.28})$$

Jednačina (D-7.1.28) predstavlja Boze-Ajnštajnovu raspodelu čestica po energijama. Prime- nićemo je sada na fotone, kvante elektromagnetnog zračenja. Izraz o održanju energije ima tada oblik:  $\sum_i N_i h\nu = E$  ( $h$  je Plankova konstanta, a  $\nu$  frekvencija) dok je statistička težina  $g_i$  koja je jednaka broju stanja iste energije, ovde fotona iste energije, jednaka Rejljevom broju koji smo izveli u poglavlju 3.1 [jednačina (3.1.20) i (3.1.24)]:

$$dn \rightarrow g_i \rightarrow \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu; \quad g_i \rightarrow \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda. \quad (\text{D-7.1.29})$$

Uz pretpostavku da broj fotona ne mora biti stalan, broj fotona  $n_i$  (po jedinici zapremine) frekvencije  $\nu$ , prema Boze-Ajnštajnovoj raspodeli (D-7.1.28) uz (D-7.1.29), je:

$$n_i = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{D-7.1.30})$$



(umesto  $\beta$  napisali smo  $kT$ , a umesto  $\varepsilon$ ,  $h\nu$ ). Kad izraz (D-7.1.30) pomnožimo energijom  $h\nu$  dobijamo energiju koja se emituje u okolini frekvencije  $\nu$ :

$$u_\nu d\nu = n_i h\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (\text{D-7.1.31})$$

ili Plankov zakon raspodele.

Primenićemo sada Boze-Ajnštajnovu statistiku na jednoatomni gas (s parnim brojem čestica s polubrojnim spinom). Kako broj atoma u ovom slučaju mora da bude stalan, zadržaćemo konstantu  $\alpha$  iz (D-7.1.28). Za statističku težinu  $g_i$  opet uzimamo izraz (3.1.19), što je Rejljev broj ali ga ovog puta delimo sa 2, pa je ( $g_i = 1/2 \cdot 8\pi/\lambda^4 d\lambda$ ), jednačina (3.1.24). Podsetimo se na to da smo faktor 2, pri izvođenju Rejljevog broja, uveli zbog polarizovanosti elektromagnetnih talasa, pa ovog puta nema potrebe da ga uračunavamo. Pod  $\lambda$  sada podrazumevamo De Brojljevu talasnu dužinu atoma (videti poglavlje 8.1). Podsetimo se takođe da smo Rejljev broj odredili kao broj stojećih (elektromagnetnih) talasa u okolini frekvencije  $\nu$  odnosno talasne dužine  $\lambda$ . Kako nas sada interesuje broj stanja atoma, sabiraćemo njima pridružene De Brojljeve talase što za rezultat opet daje (3.1.19) odnosno polovinu Rejljevog broja. De Brojljeva talasna dužina je  $\lambda = h/p = h/\sqrt{2m\varepsilon}$  (videti poglavlje 8.1), gde su  $h$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $m$ , Plankova konstanta, impuls, kinetička energija i masa atoma, redom. De Brojljevu talasnu dužinu  $\lambda$  (i  $d\lambda$ ) izrazićemo u funkciji kinetičke energije i odrediti  $g$ :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\varepsilon}} \Rightarrow d\lambda = -\frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{2m}} \varepsilon^{-\frac{3}{2}} d\varepsilon; \quad \frac{1}{\lambda^4} = \frac{(2m\varepsilon)^2}{h^4}. \quad (\text{D-7.1.32})$$

$$g = \frac{4\pi}{\lambda^4} d\lambda = 4\pi \frac{(2m\varepsilon)^2}{h^4} \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{2m}} \varepsilon^{-\frac{3}{2}} d\varepsilon = \frac{4\pi}{h^3} \sqrt{(2m^3)} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon.$$

Sada možemo napisati Boze-Ajnštajnov zakon raspodele čestica po energijama:

$$dn = \frac{4\pi}{h^3} \sqrt{(2m^3)} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{e^{\alpha + \frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \quad (\text{D-7.1.33})$$

$\alpha$  se određuje izračunavanjem integrala izraza (D-7.1.33) po svim energijama. Račun pokazuje da je konstanta  $\alpha$  kod normalnih temperatura vrlo velika, pa se 1 u imeniocu može zanemariti. Tada Boze-Ajnštajnova raspodela prelazi u Bolcmanovu:

$$dn \sim e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

Samo na najnižim temperaturama Boze-Ajnštajnova raspodela znatno odstupa od Bolcmanove pri nekim normalnim gustinama čestica. Tek na zvezdama, gde je materija vrlo gusta a i temperatura visoka, dolaze do izražaja kvantni uticaji, a raspodela čestica po energijama opisuju se Boze-Ajnštajnovim zakonom.

### D-7.1.3 Fermi-Dirakova statistika

Kod čestica s polubrojnim spinom (elektroni, nukleoni) koje nazivamo fermioni treba da se uzme u obzir i Paulijev princip isključenja. Ovaj princip pokazuje da se u jednom kvantnom stanju može nalaziti samo jedna čestica što, takođe, predstavlja bitnu razliku u odnosu na klasičnu raspodelu. Verovatnoću neke raspodele proračunaćemo polazeći od sledećih principa:

- a) čestice ne mogu da se razlikuju,
- b) u jednom kvantnom stanju može biti samo jedna čestica.

Razdelimo prostor na oblasti koje sadrže elementarne ćelije. U  $i$ -toj oblasti sa  $g_i$  ćelija, nalazi se  $N_i$  čestica. S obzirom na to da se u jednoj ćeliji može nalaziti samo jedna čestica, broj čestica je manji ili najviše jednak broju ćelija. Zamislimo da smo čestice rasporedili po ćelijama oblasti. Nove raspodele dobijamo kad variramo indekse ćelija. Ako međusobno permutujemo pune ćelije, a njih ima  $N_i$  ne dobijamo novu raspodelu. Ne dobijamo novu raspodelu ni kad permutujemo prazne ćelije, a njih ima  $g_i - N_i$ . Ukupni broj različitih permutacija  $N_i$  čestica na  $g_i$  ćelija jednak je:

$$\frac{g_i!}{N_i!(g_i - N_i)!}$$

a ukupni broj permutacija koji daje raspodelu čestica fermiona je:

$$w_F = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!(g_i - N_i)!} . \quad (\text{D-7.1.34})$$

Primenom Stirlingove formule odredićemo prirodni logaritam izraza (D-7.1.34):

$$\ln w_F = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!] = \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - (g_i - N_i) \ln (g_i - N_i)] . \quad (\text{D-7.1.35})$$

Uz uslov stalnosti broja čestica  $N_i$  i ukupne energije  $E$ , prema jednačinama (D-7.1.4) i (D-7.1.5) i pomoću metode Lagranževih multiplikatora, najverovatniju raspodelu odredićemo (kao i u slučaju Bolcmanove i Boze-Ajnštajnovе statistike) iz izraza:

$$d \ln w_F - \alpha \sum_i dN_i - \beta \sum_i \epsilon_i dN_i = 0 . \quad (\text{D-7.1.36})$$

Diferenciranjem izraza (D-7.1.35) i zamenjivanjem u (D-7.1.36) dobija se:

$$\sum_i \{ [-\ln N_i + \ln (g_i - N_i) - \alpha - \beta \epsilon_i] dN_i \} = 0 . \quad (\text{D-7.1.37})$$

Izraz (D-7.1.37) jednak je nuli za:

$$\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = \alpha + \beta \epsilon_i \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \Rightarrow N_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + 1} . \quad (\text{D-7.1.38})$$

Broj stanja iste energije (stepen degeneracije), zbog dva moguća usmerenja spina je izraz (D-7.1.32):

$$g = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{(2m^3)} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon \quad (\text{D-7.1.39})$$

i dva puta je veći kod fermiona nego kod bozona. Konačno, Fermi-Dirakova raspodela čestica po energijama ima oblik:

$$dn = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{(2m^3)} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\frac{\alpha + \epsilon}{kT}} + 1} \quad (\text{D-7.1.40})$$

Funkcija:

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\alpha + \epsilon}{kT}} + 1} \quad (\text{D-7.1.41})$$

naziva se Fermijeva funkcija i merilo je zaposednutosti pojedinog kvantnog stanja. Umesto  $\alpha$  uvedimo sada novu konstantu  $-\epsilon_F/kT$ , gde sa  $F$  označavamo tzv. Fermijev nivo, a sa  $\epsilon_F$  energiju ovog nivoa. Fermijeva funkcija konačno izgleda:

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_F}{kT}} + 1} \quad (\text{D-7.1.42})$$

Na apsolutnoj nuli,  $T = 0$ , funkcija  $f$  ima osobine:  $f(\epsilon \leq \epsilon_{F0}) = 1$ ;  $f(\epsilon > \epsilon_{F0}) = 0$ . To znači da na apsolutnoj nuli čestice, npr. elektroni u metalu, zaposedaju kvantna stanja od najnižeg do najvišeg (Fermijevog nivoa). Svi nivoi niži od Fermijevog i zaključno s Fermijevim potpuno su ispunjeni elektronima ( $f = 1$ ). Svi nivoi iznad Fermijevog potpuno su prazni ( $f = 0$ ), Slika D-7.1.2. Na ordinati je prikazana funkcija  $f$ , a na apscisi energija  $\epsilon$ . Ukupni broj elektrona  $n$  u stanjima energije od  $\epsilon = 0$  do  $\epsilon = \epsilon_F$  na apsolutnoj nuli, jednak je integralu izraza (D-7.1.40), pri čemu je tada funkcija  $f = 1$ :

$$dn = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \sqrt{\epsilon} d\epsilon \Rightarrow \int_0^n dn = n = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \int_0^{\epsilon_F} \sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{8\pi}{3h^3} \sqrt{(2m)^3} \epsilon_{F0}^{3/2} \Rightarrow \quad (\text{D-7.1.43})$$

$$\epsilon_{F0} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} n^{2/3} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}; \left( n = \frac{N}{V} \right).$$

Jednačina pokazuje da energija Fermijevog nivoa (na apsolutnoj nuli) zavisi od gustine elektrona  $n$  u provodnoj zoni metala. Izračunaćemo sada energiju Fermijevog nivoa natrijuma. Pretpostavićemo da je broj elektrona jednak broju atoma natrijuma, tj. da jedan atom daje po jedan slobodan elektron (model slobodnog elektronskog gasa). Kako je atomska masa natrijuma 23, a gustina  $0,93 \text{ g/cm}^3$ , gustina elektrona  $n$  je:

$$n = \frac{6,023 \cdot 10^{23}}{V} = \frac{6,023 \cdot 10^{23}}{M} \rho = 2,44 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 2,44 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

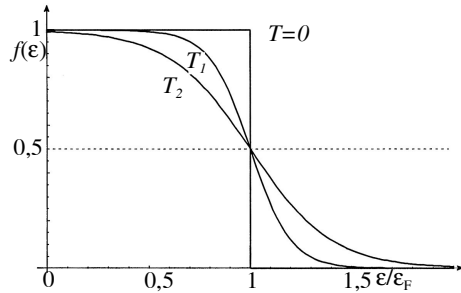
Kad se ova vrednost za  $n$  zajedno s Plankovom konstantom  $h$  ( $=6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ) i masom elektrona  $m$  ( $=9,109 \cdot 10^{-31}$ ) zameni u (D-7.1.43), dobija se da je vrednost energije Fermijevog nivoa  $\epsilon_F = 3,04 \text{ eV}$ . Ova vrednost energije daleko je iznad kinetičke energije čije je merilo  $kT$  (prema zakonima ravnotežne termodinamike). Ovoliku energiju „klasičan“ elektronski gas imao bi tek na 35 250 K. Dakle, „elektronski gas“ u metalu nije „klasičan“ gas već tipični Fermijev. Na Slici D-7.1.3 prikazana je zavisnost  $dn/d\epsilon$  kao funkcija  $\epsilon$ , na apsolutnoj nuli, prema (D-7.1.43).

Na temperaturama iznad apsolutne nule, Fermijeva funkcije je različita od nule i za  $\epsilon > \epsilon_F$ , što govori o tome da elektroni popunjavaju nivoe i iznad Fermijevog. Energija Fermijevog nivoa je sada energija pri kojoj je vrednost Fermijeve funkcije  $f(\epsilon_F) = 0,5$ , videti (D-7.1.42). Funkcija  $f(\epsilon_F)$ , ipak, brzo teži nuli što se vidi i sa Slike D-7.1.2, pa njena vrednost pri  $\epsilon - \epsilon_F = 0,1 \text{ eV}$  iznosi oko 0,02 (maksimalna vrednost je 1). Na Slici D-7.1.3 prikazana je i zavisnost  $dn/d\epsilon$  kao funkcija  $\epsilon$ , za dve temperature prema (D-7.1.40).

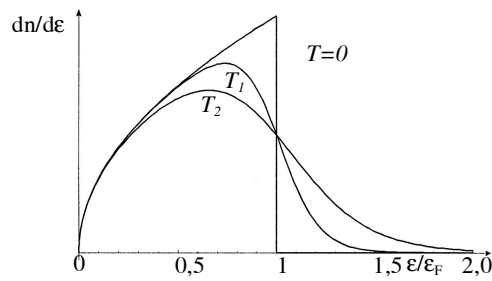
Kod provodnika, energija Fermijevog nivoa,  $\epsilon_F$  menja se sa temperaturom po sledećem zakonu:

$$\epsilon_F(T) = \epsilon_{F0} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_{F0}} \right)^2 \right]. \quad (\text{D-7.1.44})$$

Drugi član predstavlja malu popravku i iznosi oko 0,01% na sobnoj temperaturi. Dakle, možemo da zaključimo da se kod provodnika energija Fermijevog nivoa praktično **ne menja** s temperaturom.



Slika D-7.1.2 Fermijeva funkcija energije.



Slika D-7.1.3 Broj elektrona određene energije u funkciji energije, tačnije  $\epsilon/\epsilon_F$ .

Fotoelektrični efekt je pojava emisije elektrona iz metala pod dejstvom svetlosti. Otkrio ga je slučajno, još 1887. godine, R. Herc (Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894), izvedeći eksperimente pomoću kojih je želeo da pokaže postojanje elektromagnetnih talasa i tako potvrdi Maksimalovu elektromagnetnu teoriju. Herc je primećio da se između kuglica od cinka vrlo lako javlja varničenje kad se jedna od njih osvetli ultravioletnom svetlošću. Sledeće detaljno istraživanje fotoelektričnog efekta izveo je A. Stoletov u periodu od 1888. do 1890. godine. Koristio je uređaj kao na Slici 7.1.1, koji čini evakuisana cev u kojoj se nalazi uglačana metalna ploča vezana za negativni pol izvora napona i služi kao katoda.

Metalna mrežica bila je povezana s pozitivnim polom baterije i predstavlja anodu. Utvrđeno je da struja teče kroz galvanometar kad se katoda osvetli ultravioletnom svetlošću. Kako je sud bio evakuisan, struja je mogla nastati samo na račun naelektrisanih čestica (elektrona) izbijenih iz metala.

Opisana pojava jeste spoljašnji fotoefekt. Njega treba razlikovati od unutrašnjeg fotoefekta o kojem ovde neće biti govora.

Vrlo fine eksperimente vezane za fotoelektrični efekt izveo je 1902. godine Lenard (Philipp Lenard, 1862–1947; Nobelova nagrada za fiziku 1905) i na osnovu njih došlo se do saznanja da:

a) intenzitet fotostruje zavisi od intenziteta svetlosti kojom se obasjava metalna ploča odnosno katoda;

b) energija emitovanih elektrona zavisi samo od frekvencije upadne svetlosti (i s njom raste linearно) ali ne zavisi od intenziteta svetlosti;

c) postoji karakteristična, granična frekvencija za svaki metal ispod koje se, ma koliko dugo se osvetljava površina metala, ne javlja fotoefekt.

Eksperimentalnim putem dobijena saznanja o fotoelektričnom efektu trebalo je protumačiti teorijski, polazeći od važećih fizičkih zakona. Tada je to, pre svega, bila klasična elektromagnetna teorija. Očigledno je da elektroni u metalu, pod dejstvom svetlosti, dobijaju energiju potrebnu da napuste metal. S gledišta klasične elektrodinamike, to bi značilo da elektromagnetni talasi koji padaju na površinu metala izazivaju prinudne oscilacije elektrona sa amplitudama koje su proporcionalne amplitudama samih talasa. Ako sile koje zadržavaju elektrone u metalu nisu velike, očekivali bismo emisiju elektrona čije su brzine proporcionalne amplitudama upadnih elektromagnetnih talasa. Podsetićemo se na to da je energija elektromagnetnog zračenja  $S$  koja prođe kroz jediničnu površinu u jednoj sekundi [videti poglavlje 9.3 i jednačinu (9.3.4)] jednaka:

$$S = \epsilon_0 c E^2 \quad (7.1.1)$$

gde je  $\epsilon_0$  dielektrična konstanta vakuuma,  $c$  brzina svetlosti dok je  $\mathcal{E}$  jačina električnog polja. Jednačina (7.1.1) u opštijem obliku glasi:

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \quad (7.1.1a)$$

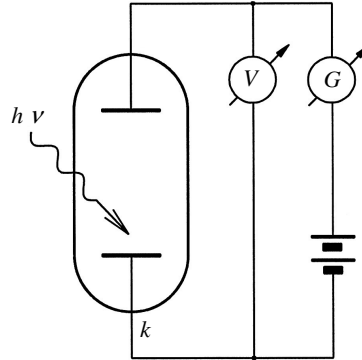
gde je  $\vec{S}$  Pointingov vektor a  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  su vektori električnog polja i magnetne indukcije. Kod elektromagnetnih talasa važi:

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|$$

pa možemo napisati (7.1.1). Vektor električnog polja  $\mathcal{E}$ , prema (D-3.1.13), ima oblik:

$$\vec{E} = \vec{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

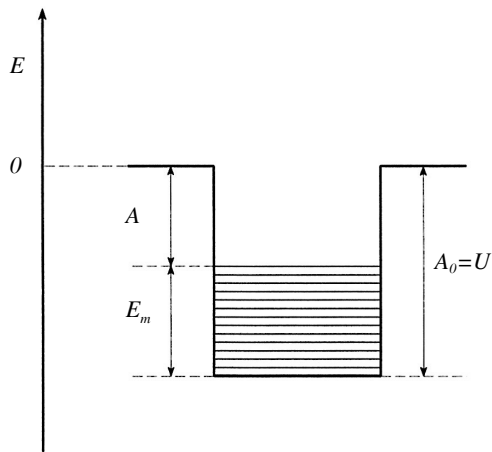
dok je njegov intenzitet  $E = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  (uzima se realni deo kompleksnog broja).  $A$  je amplituda talasa,  $\omega$  ugaona frekvencija,  $t$  vreme,  $\vec{k}$  talasni vektor, a vek-



Slika 7.1.1 Aparatura za proučavanje fotoefekta. Instrument za merenje napona označen je sa  $V$ , a instrument za merenje struje sa  $G$ .

tor  $\vec{r}$  definiše položaj tačke u ekvifaznoj ravni (videti D-3.1). Intenzitet elektromagnetnog zračenja  $I$ , polazeći od (7.1.1), definiše se kao srednja vrednost od  $E^2 \cdot \epsilon_0 c$ :

$$I = \langle S \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle \sim A^2 \epsilon_0 c \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \rangle \sim A^2 \quad (7.1.2)$$



Slika 7.1.2 Energijski nivoi elektrona u metalu. Izlazni rad  $A$  definiše se u odnosu na elektrone s najvećom energijom (na apsolutnoj nuli) u metalu. Horizontalne linije označavaju ukupnu energiju elektrona (zbir kinetičke  $T$  i potencijalne  $U$ ).

i proporcionalan je (kvadratu) amplitude. Prema tome, prema klasičnoj teoriji očekuje se proporcionalnost između brzine, odnosno kinetičke energije emitovanih elektrona, i amplitude talasa, a kako je amplituda proporcionalna intenzitetu, jednačina (7.1.2), i intenziteta talasa. Eksperimenti, naprotiv, pokazuju da brzine emitovanih elektrona ne zavise od intenziteta upadne svetlosti, već samo od njene frekvencije. Teoriju fotoelektrnog efekta postavlja 1905. A. Ajnštajn.

Pre nego što iznesemo detalje ovog tumačenja, reći ćemo nešto o raspodeli energije elektrona u metalu.

Elektroni u provodnoj traci metala (elektronski gas) nalaze se u potencijalnoj jami dubine  $U$  na različitim energijskim nivoima, Slika 7.1.2. Na apsolutnoj nuli ( $T=0$ ) najviši

energijski nivo zaposednut elektronima,  $E_{FO}$ , naziva se Fermijev nivo (Enrico Fermi, 1901–1954; Nobelova nagrada za fiziku 1938). Na temperaturama  $T > 0K$ , prema Fermi-Dirakovoj (Paul Dirac, 1902–1984, podelio sa E. Schrödingerom 1933. godine Nobelovu nagradu za fiziku) statistici, postoji verovatnoća da elektroni imaju energiju  $E > E_F$  [videti D-7.1.3, npr. jednačine (D-7.1.40)–(D-7.1.44)]. Ova verovatnoća raste s porastom temperature. Na nižim temperaturama verovatnoća brzo teži nuli za energije veće od  $E_F$ . Da bi se elektron udaljio iz metala treba da mu se doda energija. Ova energija naziva se izlazni rad  $A$  i definiše se u odnosu na elektrone s najvećom energijom u metalu (na apsolutnoj nuli)  $E_m$ , dakle, u odnosu na Fermijev nivo i jednaka je, prema Slici 7.1.2, apsolutnoj vrednosti energije Fermijeveg nivoa. Elektronima koji leže dublje u potencijalnoj jami i, prema tome, imaju manju energiju treba da se saopšti energija veća od  $A$ , ili kako se vidi sa slike, najviše  $A_0$ , što odgovara energiji koju treba saopštiti elektronima u najnižem nivou energije.

Vratimo se sada na Ajnštajnovu teoriju fotoelektrnog efekta. Polazeći od Plankove kvantne hipoteze, Ajnštajn iznosi pretpostavku da je elektromagnetno zračenje mlaz „čestica” kvanata, sa energijom  $h\nu$ , gde je  $h$  Plankova konstanta, a  $\nu$  frekvencija. Godine 1926. Dž. N. Luis (Gilbert Newton Lewis, 1875–1946) uvodi izraz **foton** kao drugi naziv za kvant energije  $h\nu$ . Ajnštajn objašnjava fotoelektrični efekt uzajamnim dejstvom dve čestice, jednog elektrona u metalu i jednog kvanta energije  $h\nu$ . U takvoj interakciji, kvant energije  $h\nu$  apsorbuje se u potpunosti. Ako je

energija kvanta veća od izlaznog rada  $A$ , tada elektron napušta metal s kinetičkom energijom:

$$\frac{mv_m^2}{2} = h\nu - A \Rightarrow h\nu = A + \frac{mv_m^2}{2}. \quad (7.1.3)$$

Jednačina (7.1.3) izražava zakon o održanju energije pri interakciji foton-elektron. Pre uzajamnog dejstva postojao je foton sa energijom  $h\nu$  i elektron u metalu. Posle interakcije, u kojoj elektron potpuno apsorbuje foton energije  $h\nu$ , nastaje slobodni elektron koji ima kinetičku energiju  $mv_m^2/2$  (ukoliko je  $h\nu > A$ ). Energija  $A$  utrošena je na izlazak elektrona na površinu metala. Analizom jednačine (7.1.3) zaključujemo da:

- 1) fotoelektrični efekt nije moguć kad je  $h\nu < A$ ;
- 2) granična, najniža frekvencija (ili, kako se još kaže, crvena granica fotoefekta) pri kojoj je još uvek fotoefekt moguć, dobija se iz uslova  $h\nu = A$ ; u ovom slučaju kinetička energija emitovanih elektrona jednaka je nuli;
- 3) maksimalna kinetička energija emitovanih elektrona zavisi samo od frekvencija upadne svetlosti i linearna je funkcija frekvencije.

Pri eksperimentalnom ispitivanju fotoefekta određuje se zavisnost fotostruje od napona između emitera i kolektora. Pozitivni napon znači da je emiter katoda a kolektor anoda (kao što je naznačeno na Slici 7.1.1), pa se pri takvim naponima elektron nalazi u električnom polju koje ga ubrzava. Negativni napon znači obrnuti polaritet emitera i kolektora – emiter je sada anoda a kolektor katoda, pa na elektrone deluje usporavajuće električno polje. Kad energija usporavajućeg polja  $eU$  postane jednaka ili veća od kinetičke energije elektrona s maksimalnom kinetičkom energijom, elektroni „oslobodeni” iz metala dejstvom svetlosti, ne mogu da pređu put od emitera do kolektora zbog dejstva usporavajućeg polja i fotostruja  $I$  opada do nule:

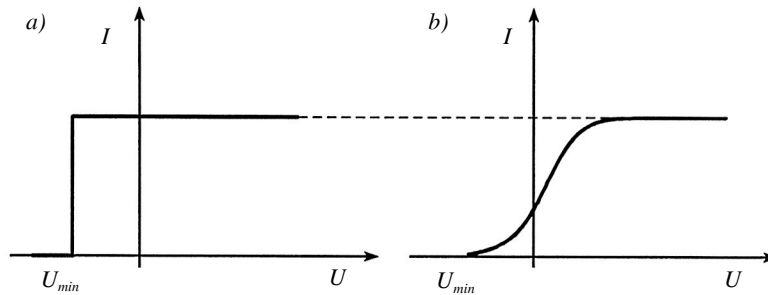
$$eU \geq \frac{mv_m^2}{2} \Rightarrow I = 0.$$

Tako je minimalni usporavajući napon dovoljan da zaustavi tok fotostruje i merilo maksimalne kinetičke energije elektrona ( $\epsilon_m = eU_{min}$ ). Kad bi svi oslobodeni elektroni imali istu brzinu, pa prema tome i istu kinetičku energiju  $\epsilon$ , zavisnost jačine fotostruje od napona između emitera i kolektora imala bi oblik kao na Slici 7.1.3a. Međutim, obično se ne dobija ovakvo naglo smanjenje jačine struje već tok zavisnosti jačine fotostruje od napona između elektroda ima oblik kao na Slici 7.1.3.b. Jačina fotostruje postepeno slabi pošto elektroni napuštaju površinu metala različitim brzinama odnosno kinetičkim energijama, a njihov broj određen je Fermi-Dirakovom raspodelom. Jačina struje proporcionalna je broju elektrona  $n$  koji stignu do kolektora, a do kolektora pri usporavajućem naponu  $U$  stižu svi elektroni sa energijom koja je jednaka ili veća od  $eU = \epsilon$ :

$$I \sim \int_{\epsilon}^{\infty} dn \Rightarrow \frac{dI}{d\epsilon} = \frac{1}{e} \frac{dI}{dU} \sim \epsilon^{1/2} f_F \quad (7.1.4)$$

gde je  $n$  broj elektrona, indeks  $F$  označava da je raspodela po energijama Fermi-Dirakova,  $f$  je Fermijeva funkcija [videti jednačinu (D-7.1.40)]. Sama raspodela može

da se rekonstruiše diferenciranjem, eksperimentalnim putem dobijene krive  $I = \varphi(U)$  kao što je označeno jednačinom (7.1.4). Tada postoji mogućnost da se odredi razlika  $\Delta$  između maksimalne energije elektrona ( $I = 0$ ) na nekoj temperaturi  $T$  i one koja odgovara Fermijevoj nivou (za  $\epsilon = \epsilon_F$  Fermijeva funkcija  $f = 0,5$ ) a izlazni rad, prema (7.1.3), obračuna u odnosu na Fermijev nivo.



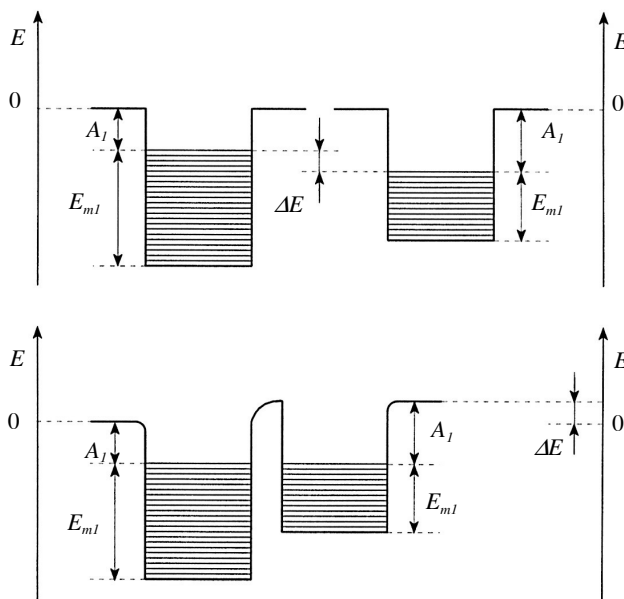
Slika 7.1.3 Jačina fotostruje u funkciji napona: a) zavisnost jačine fotostruje od napona između kolektora i emitara u hipotetičkom slučaju kad svi elektroni imaju istu energiju; b) zavisnost jačine fotostruje od napona između kolektora i emitara u stvarnom slučaju.

Opisaćemo sada eksperiment koji je izveo R. Milken tokom 1916. i za to doba izvršio strogu eksperimentalnu proveru Ajnštajnovе jednačine za fotoelektrični efekt. Napomenimo to da je tek deset godina kasnije, 1926. godine, formulisana Fermi-Dirakova statistika. Provera se sastojala u određivanju maksimalne kinetičke energije emitovanih elektrona pri različitim frekvencijama upadne svetlosti. Pri tome, maksimalna kinetička energija fotoelektrona može da se izrazi kao proizvod naelektrisanja elektrona  $e$  i najmanjeg usporavajućeg napona  $U_{min}$  koji je potreban da zaustavi tok fotoelektrona sa emitara ( $\epsilon_m = eU_{min}$ ). Ovaj napon trebalo je da se eksperimentalno odredi.

Pri proveru Ajnštajnovе jednačine maksimalnu kinetičku energiju oslobođenih fotoelektrona trebalo je što tačnije odrediti, što nije bilo jednostavno iz dva razloga. Prvo, kriva zavisnosti jačine fotostruje od napona ne preseca apscisnu osu već joj se asimptotski približava, pa je vrednost minimalnog usporavajućeg napona u izvesnoj meri neodređena. Drugo, zbog neizbežnog postojanja kontaktne razlike potencijala između elektroda u aparaturi, Slika 7.1.4, kriva treba da se translatorno pomeri za vrednost ovog potencijala, a njega nije lako odrediti. Zbog toga se prilično dugo čekalo na eksperimentalnu potvrdu Ajnštajnovе jednačine.

Pri ovakvom merenju koristi se metoda sfernog kondenzatora. Zbog posebnosti kretanja elektrona u električnom polju ovakvog kondenzatora, gde jednu elektrodu čini mala metalna kuglica a drugu sferna metalna obloga, kriva zavisnosti jačine fotostruje od napona strmo se spušta, pa se napon, potreban da zaustavi tok emitovanih elektrona, može vrlo tačno odrediti. Na Slici 7.1.5. prikazana je šema eksperimentalnog uređaja. Monohromatska svetlost, kroz kvarcni prozorčić, dospeva u evakuisani balon S, čija posrebrana unutrašnja strana predstavlja spoljnu oblogu kondenzatora. Metalna kuglica M je od ispitivanog materijala (na primer, od cinka) i služi kao unutrašnja obloga. Potencijetrom R uspostavlja se određeni napon u kondenzatoru. Ovaj napon meri se voltmetrom V. Potencijal kuglice meri se elektrometrom E. Kuglica se osvetljava svetlošću različitih talasnih dužina, a kao

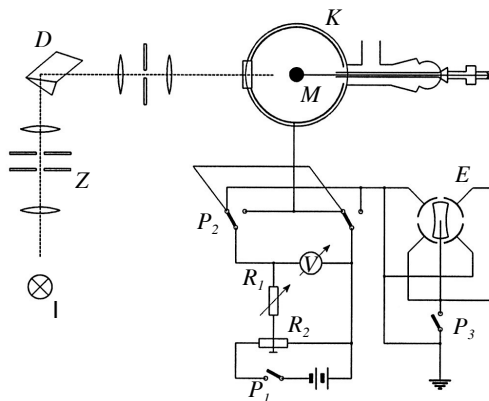




Slika 7.1.4 Metali 1 i 2 razlikuju se u dubini potencijalne jame a samim tim i u broju energijskih stanja elektrona. Kad se metali spoje, nastaje izjednačavanje nivoa najviše energije, a kontaktna razlika potencijala jednaka je razlici izlaznih radova.

rezultati merenja dobijaju se krive date na Slici 7.1.6a i 7.1.6b. Da bi se sprečila emisija elektrona sa kolektora (sferne metalne obloge), na njega se nanosi metal koji ima daleko veći izlazni rad, u ovom slučaju srebro.

Slika 7.1.5 Šema eksperimentalnog uređaja koji je koristio Miliken pri proveru Ajnštajnovе jednačine za fotoefekt. Optički deo sastoji se i od izvora polihromatske svetlosti  $I$ , blende  $Z$  i disperzionog elementa  $D$ . Svetlost izabrane talasne dužine pada na kuglicu od ispitivanog materijala  $M$ , koja sa slojem  $K$  čini obloge kondenzatora. Na obloge se dovodi napon koji može da se menja pomoću otpornika  $R_1$  i  $R_2$ . Preklopnik  $P_2$  služi za menjanje polariteta. Struja koja protiče kroz kolo meri se kvadrant-elektrometrom  $E$  koji je spojen u idiostatičkom spoju (bez pomoćnog izvora).



Pri određenoj potencijalnoj razlici krive počinju da opadaju i nezavisno od upotrebljene talasne dužine svetlosti. Ova potencijalna razlika upravo je jednaka kontaktnoj razlici potencijala, koja se određuje bez posebnih merenja. Preseci krivih  $I$  sa apscisom  $U$  određuju vrednosti:

$U_{1min}$  za frekvenciju svetlosti  $\nu_1$

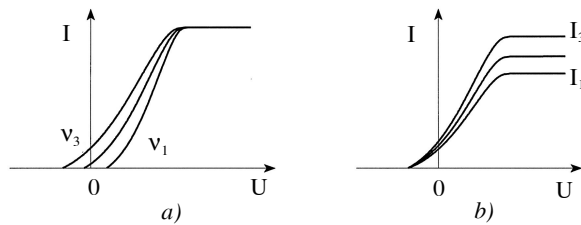
$U_{2min}$  za frekvenciju svetlosti  $\nu_2$

gde je  $\nu_1 < \nu_2$ .

Prema tome<sup>9</sup>:

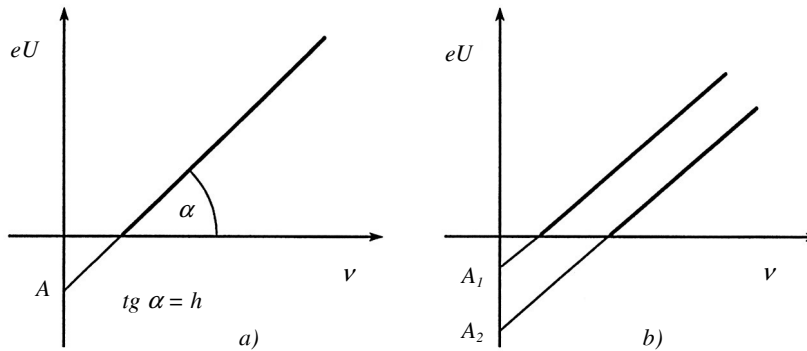
$$eU_1 = m\nu_1^2/2 \text{ za frekvenciju } \nu_1$$

$$eU_2 = m\nu_2^2/2 \text{ za frekvenciju } \nu_2.$$



Slika 7.1.6 Zavisnost jačine fotostruje od napona između emitera i kolektora: a) pri osvetljavanju emitera svetlošću različitih frekvencija; b) pri osvetljavanju emitera svetlošću iste frekvencije a različitih intenziteta.

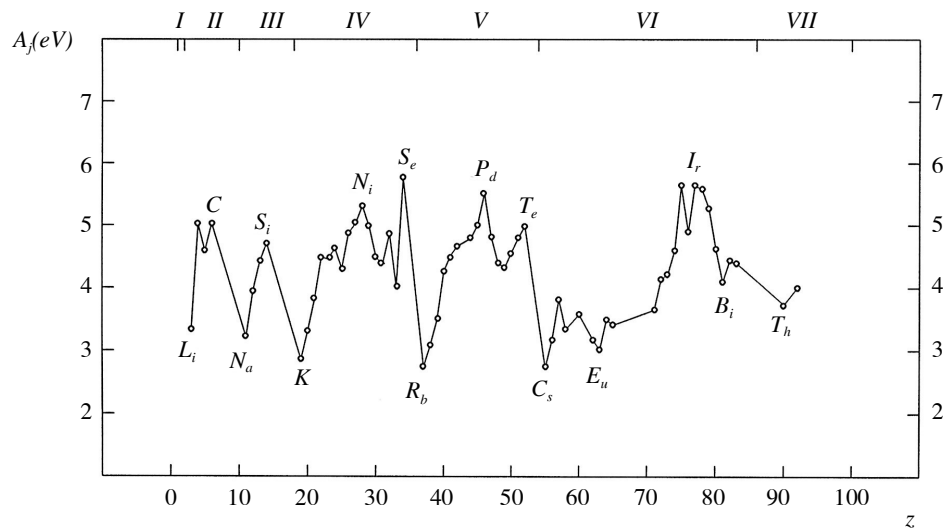
Rezultati merenja pokazuju da maksimalna kinetička energija elektrona raste s porastom frekvencije. Kad se vrednosti minimalnih usporavajućih napona pri kojima se zaustavlja tok emitovanih elektrona, predstave u zavisnosti od  $\nu$ , dobija se prava kao na Slici 7.1.7a. Iz nagiba prave može da se odredi vrednost Plankove konstante ( $h = e \tan \alpha$ ). Prava  $U = f(\nu)$  seče  $U$ -osu, a iz veličine ovog odsečka može da se izračuna vrednost izlaznog rada za konkretni metal. Na Slici 7.1.7 b) prikazane su prave koje predstavljaju fotoelektrični efekat sa dva različita metala, a na Slici 7.1.8 prikazane su vrednosti izlaznih radova u zavisnosti od rednog broja.



Slika 7.1.7 Zavisnost minimalnog usporavajućeg napona, tačnije,  $eU$ , između emitera i kolektora (potrebnog da zaustavi tok emitovanih elektrona) od frekvencije upadne svetlosti: a) za jedan metal; b) za dva različita metala.

Izlazni rad elektrona iz metala manji je od energije jonizacije slobodnih atoma. To znači da su elektroni u metalima slabije vezani. Metali s manjim energijama jonizacije imaju i manji izlazni rad elektrona. Izlazni rad elektrona zavisi od kristalne strukture metala. Dakle, metali koji kristališu u različitim kristalnim oblicima imaju i različite izlazne radove za svaki od ovih oblika. Hemijski postojani me-

<sup>9</sup> Uz  $eU$ , odnosno  $m\nu^2/2$  izostavljeni su indeksi *min.* odnosno *max.*



Slika 7.1.8 Zavisnost izlaznog rada od rednog broja.

tali, npr. platina, imaju veliki izlazni rad elektrona, oko 10 eV, dok alkalni metali imaju najmanje vrednosti izlaznih radova (od 3 do 4 eV-a).

## 7.2 X-ZRAČENJE

Rendgensko ili  $x$ -zračenje otkrio je 1895. godine V. K. Rendgen (Wilhelm Conrad Röntgen, 1845–1923, godine 1901. dobio je Nobelovu nagradu za fiziku za ovo otkriće) ispitujući luminiscenciju pod uticajem katodnih zraka (brzih elektrona) u cevima za pražnjenje. Rendgen je zapazio da novo, do tada nepoznato zračenje, takođe, izaziva jaku luminiscenciju nekih supstancija, kao što su cinksulfid, cinksilikat, barijum-platinocijanid. U ovim prvim eksperimentima rendgensko zračenje dolazilo je sa zidova cevi za pražnjenje kao posledica udara elektrona o njih. Međutim, još jače zračenje nastaje kad se na put elektronskog mlaza postavi komad metala (antikatoda) koji tada, pod dejstvom udara brzih elektrona, emituje zračenje.

Neka od važnih svojstava rendgenskog zračenja uočio je sam Rendgen. Pored luminiscencije,  $x$ -zranci izazivaju i jonizaciju sredine kroz koju prolaze i deluju na fotoploču. Odlikuju se velikom prodornošću a ne skreću u električnom i magnetnom polju, što je isključivalo mogućnost da je reč o naelektrisanim česticama. Kako se o prirodi tog zračenja nije tada mnogo znalo sam Rendgen nazvao ga je  $x$  (nepoznato) zračenje.

Danas se zna da rendgenski zranci nastaju usporavanjem snopa brzih elektrona, odnosno elektrona velike energije. Nastaju u evakuisanim cevima (za pražnjenje) kakve je otprilike koristio i Rendgen, a u kojima se naspram katode postavlja metalna anoda (antikatoda). Zagrevanjem katode iz nje se emituju elektroni. Pod dejstvom visokog napona od nekoliko desetina, pa i stotina hiljada volti koji se uspostavlja u cevi, ovi elektroni se ubrzavaju i usmeravaju na antikatodu, sa koje se emituje rendgensko zračenje, Slika 7.2.1.

Po svojoj prirodi rendgenski zraci su elektromagnetni talasi čija je talasna dužina mnogo manja od talasne dužine vidljive svetlosti i kreće se u opsegu od 10 nm do 0,01 nm. To odgovara energijama  $x$ -fotona od 1 keV do 100 keV.  $X$ -zraci pokazuju interferenciona i difrakciona svojstva, karakteristična za sve talase. Spektar  $x$ -zračenja može da ima neprekidni (kontinualni, slično „beloj” svetlosti) ili linijski (diskretni) spektar – tada se govori o karakterističnom rendgenskom zračenju.

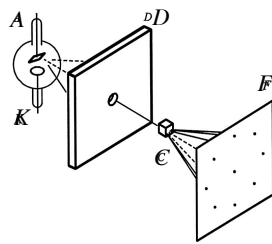
### 7.2.1 Difrakcija $x$ -zračenja na kristalnoj rešetki

Talasna priroda  $x$ -zračenja nedvosmisleno je dokazana eksperimentima difrakcije na kristalnoj rešetki. Talasi pokazuju pojavu difrakcije pri prolasku kroz uzanu pukotinu čije su dimenzije reda veličine talasne dužine upotrebljenog zračenja.

Početkom 1912. godine, čuveni nemački naučnik Maks fon Laue (Max von Laue, 1879–1960, dobio Nobelovu nagradu za fiziku 1914. godine za otkriće difrakcije  $x$ -zračenja na kristalima), predložio je da se  $x$ -zračenje propusti kroz kristal i pokaže difrakcija  $x$ -zračenja na kristalima. Da bi se razumela genijalnost ove ideje treba da znamo da 1912. godine talasna priroda rendgenskog zračenja nije bila u potpunosti dokazana, a njegova talasna dužina bila je samo približno poznata.

Teorija o strukturi kristala bila je u to vreme samo hipoteza, mada je još 1824. godine L. A. Zeber (L. A. Seber), nemački fizičar, pretpostavio da su atomi u kristalima poredani u središnjim tačkama određenih geometrijskih tela, dok je 1848. godine francuski naučnik A. Bravais (A. Bravais) dao predstavu o kristalnoj rešetki u obliku koji je kasnije prihvaćen.

Teorija kristala zasnovana je na predstavi kristalne rešetke. Zamislimo kristalnu rešetku kao skup tačaka pravilno raspoređenih u prostoru. Mrežom pravih ove tačke mogu da se povežu, čime se zapremine kristalne rešetke deli na niz jediničnih ćelija koje imaju oblik nekog geometrijskog tela. Ako svaku tačku kristalne rešetke zamenimo identičnim atomom, jonom ili grupom atoma, dobijamo kristalnu strukturu. Naglašavamo, dakle, da je rešetka mreža tačaka, a u kristalnoj strukturi svaka tačka rešetke zamenjena je materijalnim jedinicama ili izgrađivačkim česticama kristala.



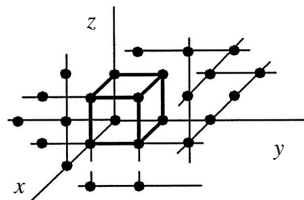
Slika 7.2.1 Laueova metoda za difrakciju  $x$ -zračenja na kristalnoj rešetki. Snop polihromatskog  $x$ -zračenja sa antikatode A fokusira se pomoću debelog zaklona D, difrakuje na kristalu C i ostavlja na fotoploči F tragove rasutog  $x$ -zračenja.

Maks von Laue je pretpostavio da kristal može da deluje kao prirodna optička rešetka. Materijalni centri kristala tada odgovaraju narezima, a njihova međusobna rastojanja pukotinama rešetke. Potreban uslov za difrakciju jeste da red veličine međuatomskog rastojanja u kristalu odgovara redu veličine talasne dužine  $x$ -zračenja. Fizičari Volter Fridrih (Walter Friedrich) i Paul Knipping (Paul Knipping) prihvatili su da eksperimentalno ostvare Laueove zamisli. Sam Max von Laue pisao je o tome: „Bilo je potrebno malo diplomatije da se Fridrih i Knipping oslobode sumnji u pog-

ledu uspeha eksperimenta i izvedu ga, najpre sa sasvim jednostavnim sredstvima, po mom planu. Kao kristal služio je bakarni sulfat, jer se od njega lako mogu dobiti pogodni i pravilni komadi. Pravac propuštanja zrakova prepustili smo slučaju. Na fotografskoj ploči iza kristala, prvi put su se, pored traga primarnog zraka koji je dolazio neposredno od antikatode, pojavili tragovi skrenutih zrakova, dakle očekivani spektri rešetke... Teorija je zapravo već bila gotova prenošenjem sa obične na recipročnu rešetku i tako je Zomerfeld mogao 8. juna 1912. podneti Minhenskoj akademiji zajednički rad Fridriha, Knipinga i moj o interferenciji rendgenskih zrakova koji je osim teorije sadržavao i niz karakterističnih snimaka.”

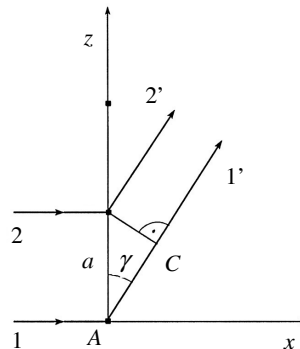
Fridrih i Kniping ozračivali su  $x$ -zračenjem prvo kristal plavog kamena, a zatim i druge kristale. Kako se mali deo upadnog zračenja difrakuje, trebalo je da se kristal ozračuje više sati da bi se na fotoploči dobili tragovi difraktovanog snopa. Rezultat tog eksperimenta bili su tzv. Laueovi dijagrami koje je kvantitativno proučio sam Laue. Na njima se vidi raspored čestica kristala sa kojih se rasejava zračenje (slika recipročne rešetke), pa je ovim eksperimentima ne samo dokazana talasna priroda  $x$ -zračenja već je i hipoteza o kristalnoj rešetki podignuta na nivo sigurne, eksperimentalno ispitane kristalografske teorije. Pomoću Laueove interferencije pošlo je za rukom engleskim naučnicima, ocu i sinu Henriju i Lorensu Bragu (Henry Bragg, 1862–1942; Lawrence Bragg, 1890–1971; podelili Nobelovu nagradu za fiziku 1915. za analizu kristalnih struktura pomoću  $x$ -zračenja) da odrede talasnu dužinu rendgenskog zračenja i dimenzije kristalne rešetke. Laueovo otkriće imalo je veliki značaj za nauku o atomu, jer su eksperimenti difrakcije  $x$ -zračenja omogućili da se atomi „vide”.

Razmotrimo sada detaljnije difrakciju  $x$ -zračenja na kristalnoj rešetki i nastajanje odgovarajuće difrakcione slike na zaklonu (fotoploči), tzv. Laueovom metodom, Slika 7.2.1.

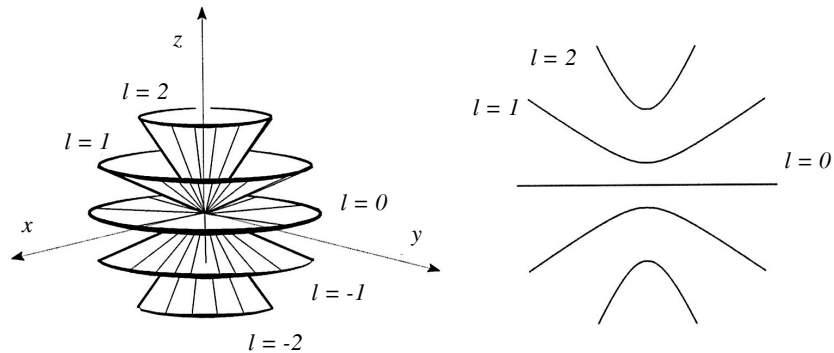


Slika 7.2.2 Kristal u koordinatnom sistemu.

Slika 7.2.3 Jednodimenzionalna rešetka na kojoj se difrakuje  $x$ -zračenje koje dolazi iz pravca  $x$ -ose. 1 i 2 su upadni, a 1' i 2' difraktovani zraci.



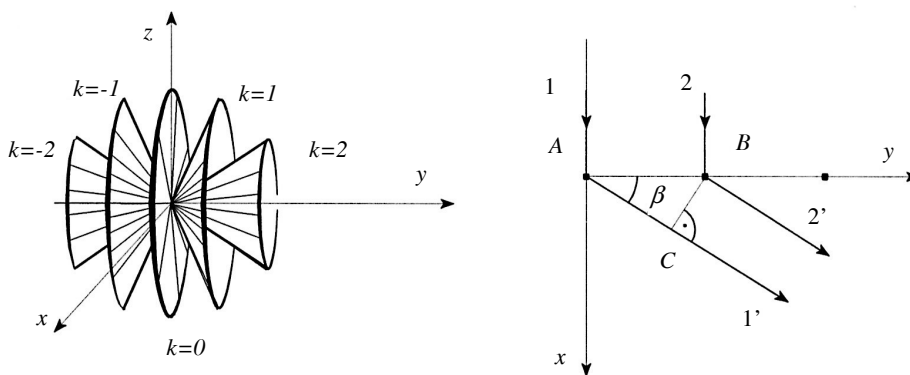
Uzani snop  $x$ -zraka, dobijen prolaskom  $x$ -zračenja iz rendgenske cevi kroz mali otvor na debelom zaklonu, pada na kristal i zatim na fotoploču. Na fotoploči nastaje difrakciona slika koja se sastoji iz središnje mrlje, koju izaziva upadni snop  $x$ -zračenja, i izvesnog broja mrlja koje su simetrično raspoređene oko središnje mrlje. Potreba ovakve difrakcione slike najlakše može da se shvati ako se pretpostavi da upotrebljeni kristal ima kubnu strukturu. Izabraćemo pravougli koordinatni sistem sa osama paralelnim osama kristala, Slika 7.2.2. Pretpostavimo da su izgrađivačke čestice kristala raspoređene duž zamišljenih linija, paralelnih koordinatnim osama. Neka upadni snop  $x$ -zračenja pada na kristal u smeru koji se poklapa s pozitivnim smerom  $x$ -ose.



Slika 7.2.4 Difrakcija na jednodimenzionalnoj kristalnoj rešetki postavljenoj u pravcu z-ose (levo): x-zraci određene talasne dužine  $\lambda$  pri određenom redu difrakcije  $l$ , nastali difrakcijom polihromatskog x-zračenja na jednodimenzionalnoj kristalnoj rešetki čije tačke leže duž z-ose, prostiru se pod određenim uglom u odnosu na z-osu. To znači da leže na obvojnici konusa čija je osa paralelna z-osi; (desno): difrakcione slike na zaklonu imaju oblik hiperbola (presek konusa sa ravni zaklona, koji je postavljen paralelno yz-ravni, je hiperbola).

Da bismo razumeli nastajanje difrakcione slike, posmatrajmo prvo međudejstvo x-zračenja s jednodimenzionalnom rešetkom čije su čestice raspoređene duž z-ose na međusobnom rastojanju  $a$ , Slika 7.2.3. x-zračenje (zraci 1 i 2) pada na kristal pod uglom  $\gamma_0 = 90^\circ$  a čestice kristala postaju centri rasejavanja. One rasejavaju zračenje u svim pravcima, a rasejani talasi međusobno interferišu, pri čemu može da dođe do njihovog poništavanja ili pojačavanja. Prema zakonima optike, da bi se pojavio difrakcioni maksimum, svi pristigli talasi moraju da budu u fazi, pa do konstruktivne interferencije dva talasa dolazi ako je njihova putna razlika jednaka celobrojnom umnošku talasnih dužina  $\lambda$ . Prema Slici 7.2.3, putna razlika  $\delta$  difraktovanih zraka 1' i 2' je:

$$AC = \delta = a \cos \gamma = l \lambda \quad (7.2.1)$$



Slika 7.2.5 Difrakcija na jednodimenzionalnoj kristalnoj rešetki (levo): difraktovani zraci (za dato  $\lambda$ ) različitih redova difrakcije  $k$ , leže po obvojnicama konusa; (desno): difrakcija x-zračenja sa jednodimenzionalne rešetke postavljene u pravcu y-ose. 1 i 2 su upadni, a 1' i 2' su difraktovani zraci.

gde je  $l = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$

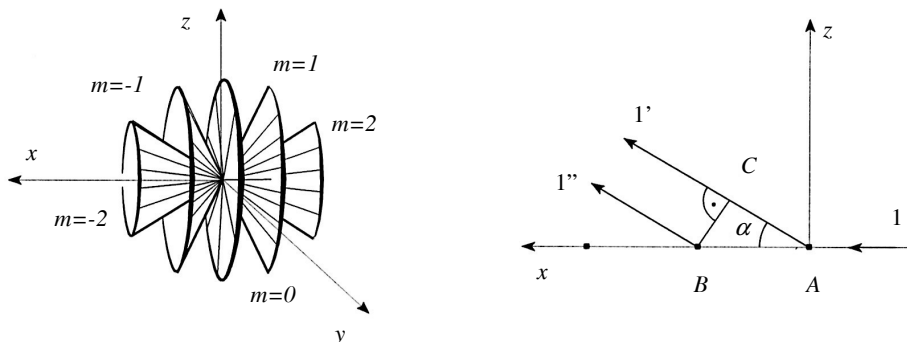
Uslov (7.2.1) je uslov za konstruktivnu interferenciju i daje pravce difrakcionih maksimuma, određenog reda difrakcije, za određenu talasnu dužinu  $\lambda$ . Ove prave leže na obvojnica konusa čija je osa paralelna  $z$ -osi, a ugao otvora  $2\gamma$ . Za različite vrednosti broja  $l$  (viši redovi difrakcije) pri istoj talasnoj dužini  $\lambda$ , dobijaju se konusi različitih otvora. Ako se na nekom rastojanju od linijske rešetke postavi fluorescentni ekran ili fotoploča (npr. u ravni paralelnoj  $yz$ -ravni), tragovi interferencionih konusa na zaklonu imaju oblik hiperbola, Slika 7.2.4 (desno). Posmatrajmo sada interakciju zračenja s jednodimenzionom kristalnom rešetkom čije su tačke postavljene u pravcu  $y$ -ose, Slika 7.2.5. Zraci 1 i 2 padaju na kristal pod uglom  $\beta_0 = 90^\circ$  u odnosu na  $y$ -osu (iz  $x$ -pravca). Čestice kristala rasejavaju ih u svim pravcima ali samo zraci koji su rasejani pod uglom  $\beta$  zadovoljavaju uslov za konstruktivnu interferenciju. Putna razlika difraktovanih zrakova 1' i 2' data je sledećom jednačinom:

$$\delta = AC = AB \cos \beta$$

gde je  $a (=AB)$  konstanta rešetke. Uslov za konstruktivnu interferenciju glasi:

$$a \cos \beta = k\lambda \quad (k = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots) \quad (7.2.2)$$

gde je  $k$  ceo broj, a  $\beta$  ugao koji zaklapaju difraktovani zraci sa  $y$ -osom. Uslov (7.2.2) zadovoljavaju svi zraci raspoređeni na konusima čije su ose paralelne  $y$ -osi sa otvorima  $2\beta$  za  $k = 1$  (2, 3...) i  $-1$  (-2, -3 ...). Tragovi ovih konusa na zaklonu postavljenom paralelno  $yz$ -ravni opet su hiperbole.



Slika 7.2.6 Difrakcija  $x$ -zračenja na jednodimenzionoj kristalnoj rešetki (desno): difrakcija  $x$ -zračenja sa jednodimenzionalnom rešetkom postavljene u pravcu  $x$ -ose. I je upadni zrak, a 1' i 1'' su difraktovani zraci; (levo): difraktovani zraci (za dato  $\lambda$ ) različitih redova difrakcije  $m$ , leže po obvojnica konusa.

Posmatrajmo sada slučaj kad zračenje iz pravca  $x$ -ose pada na dvodimenzionu kristalnu rešetku čije su tačke raspoređene duž  $z$ -ose i  $y$ -ose. Tada se difrakcioni maksimumi javljaju u pravcima koji istovremeno zadovoljavaju uslove (7.2.1) i (7.2.2). Difrakciona slika na zaklonu postavljenom paralelno  $yz$ -ravni sastoji se iz mrlja koje geometrijski odgovaraju mestima preseka već pomenutih hiperbola. Svaka mrlja na zaklonu određena je parom brojeva  $l$  i  $k$  za svako  $\lambda$ . Na ovaj način ravanska rešetka razlaže kontinualno zračenje u spektar.

Da bismo razmotrili difrakciju  $x$ -zračenja na trodimenzionoj kristalnoj rešetki posmatračemo i interakciju  $x$ -zračenja, Slika 7.2.6, koje opet dolazi iz pravca  $x$ -ose (pa je ugao koji zaklapa upadni snop sa  $x$ -osom  $\alpha_0 = 0$ ), s jednodimenzionom kristalnom rešetkom. Tačke leže duž  $x$ -ose a konstanta rešetke opet je  $a$ . Čestice kristala rasejavaju zračenje u svim pravcima, ali samo zraci rasejani pod uglom  $\alpha$  zadovoljavaju uslov konstruktivne interferencije. Putna razlika između difraktovanih zrakova 1 i 2 je:

$$\delta = AB - AC = a - a \cos \alpha = a(1 - \cos \alpha)$$

a uslov za konstruktivnu interferenciju glasi:

$$a(1 - \cos \alpha) = m\lambda \quad (m = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots). \quad (7.2.3)$$

Ovaj uslov zadovoljavaju zraci raspoređeni po obvojnici konusa čija je osa paralelna  $x$ -osi, a otvor konusa je  $2\alpha$  za  $m = +1$  (2, 3...) i  $-1$  (-2, -3 ...) ili  $-1$ . Linije preseka ovih konusa sa ravni zaklona, koji je postavljen paralelno  $zy$ -ravni, su krugovi.

Kako sada izgleda difrakciona slika na zaklonu posle difrakcije na trodimenzionoj kristalnoj rešetki? Uslovi (7.2.1), (7.2.2) i (7.2.3) moraju da budu zadovoljeni istovremeno. To znači da se na zaklonu pojavljuju difrakcione mrlje u tačkama preseka kružnica s hiperbolama, Slika 7.2.7, što je ispunjeno samo za određeno  $\lambda$ . Nađimo ovu talasnu dužinu. Iz (7.2.1), (7.2.2) i (7.2.3) dobija se:

$$(7.2.1') \quad \cos \gamma = \frac{l\lambda}{a}$$

$$(7.2.2') \quad \cos \beta = \frac{k\lambda}{a}$$

$$(7.2.3') \quad \cos \alpha = 1 - \frac{m\lambda}{a}.$$

Uglovi  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  povezani su jednačinom:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (7.2.4)$$

Jednačine (7.2.1'), (7.2.2') i (7.2.3') dignu se na kvadrat, saberu i iskoristi se uslov (7.2.4):

$$1 = \frac{l^2 \lambda^2}{a^2} + \frac{k^2 \lambda^2}{a^2} + \frac{m^2 \lambda^2}{a^2} + 1 - \frac{2m\lambda}{a}$$

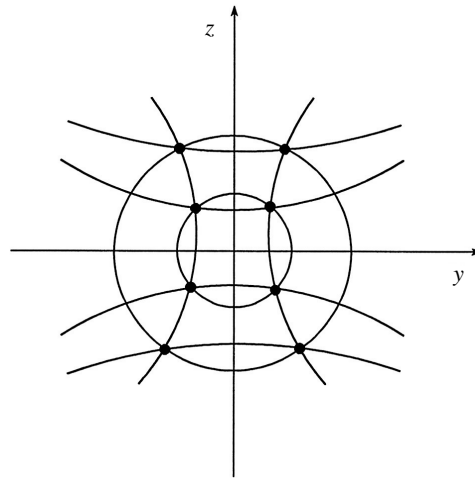
ili:

$$\lambda \left[ \lambda \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{a^2} \right) - \frac{2m}{a} \right] = 0$$

$$\lambda = 2a \frac{m}{l^2 + k^2 + m^2}. \quad (7.2.5)$$



Slika 7.2.7 Interferenciona slika na zaklonu kao rezultat difrakcije  $x$ -zračenja na trodimenzionalnoj kristalnoj rešetki. Dva skupa hiperbola i familija krugova rezultat su preseka konusa, duž kojih leže rasejani zraci, sa ravni ekrana (ravan paralelna  $yz$ -ravni). Interferencione mrlje nastaju samo u tačkama preseka odgovarajućih hiperbola i kružnica, saglasno matematičkom uslovu 7.2.5.



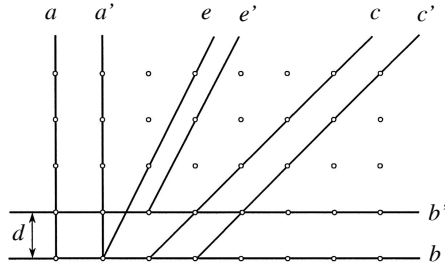
Znači, pri zadatom upadnom uglu zračenja (u našem slučaju  $\gamma_0 = \beta_0 = 90^\circ$  i  $\alpha_0 = 0^\circ$ ) difrakcioni maksimum određenog reda u određenom pravcu ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) javlja se za talasnu dužinu koja je određena jednačinom (7.2.5). Napomenimo da uslovi (7.2.1), (7.2.2) i (7.2.3) zahtevaju da je  $\lambda < a$ . Međutim,  $\lambda$  ne sme da bude mnogo manje od konstantne rešetke  $a$  jer su tada i uglovi,  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  vrlo mali pa se difrakcija teško zapaža. U Laueovoj metodi, kristali se ozračuju polihromatskim  $x$ -zračenjem, u čijem se kontinualnom spektru uvek nalaze talasi s talasnom dužinom  $\lambda$  koja zadovoljava jednačinu (7.2.5).

### 7.2.2 Bragov metod difrakcije $x$ -zračenja na kristalima

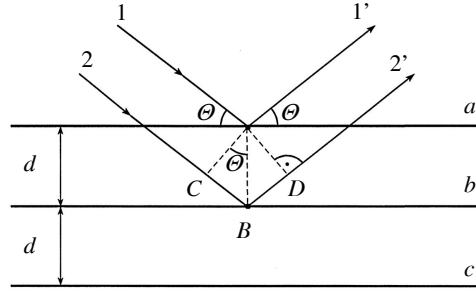
Fizičari Henri i Lorens Brag, protumačili su pojavu rasejavanja  $x$ -zračenja na kristalnoj rešetki kao refleksiju sa ravni kristala koje na zračenje deluju poput ogledala. U skladu s ovom interpretacijom oni su postavili i odgovarajući uslov neophodan za pojačavanje (konstruktivna interferencija) reflektovanog zračenja. Radom H. i L. Braga postavljene su osnove analize strukture kristala rendgenskim zračenjem.

Prema ovoj zamisli smatra se da tačke kristalne rešetke pripadaju sistemima međusobno paralelnih ravni koje, kada se projektuju na ravan slike, daju prave, Slika 7.2.8. Te ravni mogu da budu različito usmerene u prostoru. Sistemi ravni razlikuju se u broju atoma po jedinici površine  $a$  date ravni i po rastojanju  $d$  (između paralelnih ravni). Veličina  $a/d$  je konstanta za određeni sistem paralelnih ravni i jednaka je broju atoma po jedinici zapremine kristala.

Izvešćemo sada Bragov uslov za konstruktivnu interferenciju. Neka na kristal pada snop monohromatskog  $x$ -zračenja pod uglom  $\theta$  u odnosu na sistem paralelnih ravni sa kojih se zračenje reflektuje. Ove ravni, u ravni slike ostavljaju tragove u vidu paralelnih pravih,  $a, b, c$ , Slika 7.2.9. Atomi (joni ili molekuli) koji čine kristal rasejavaju zračenje u svim pravcima. Nas zanima pod kojim uglovima dolazi do konstruktivne interferencije reflektovanog zračenja, dakle do onog koje je rasejano u pravcu  $\theta$ . Ako posmatramo samo ravan  $a$ , Slika 7.2.9. vidi se da se za bilo koju talasnu dužinu  $\lambda$  upadnog zračenja dobija konstruktivna interferencija rasejanog zračenja kad je ugao jednak uglu  $\theta$ , jer su putne dužine za sve zrake međusobno



Slika 7.2.8 Tragovi sistema paralelnih ravni.



Slika 7.2.9 Uz izvođenje Bragovog uslova za konstruktivnu interferenciju.

jednake. Možemo, prema tome, da smatramo da se snop reflektovao sa ravni  $a$ . Međutim, deo upadnog snopa prolazi dalje kroz kristal, pa se reflektuje i sa ravni  $b$ ,  $c$ , itd. Zraci  $1'$  i  $2'$  reflektovani ovim ravnima međusobno interferišu. Pri tome, dolazi do pojačavanja odnosno do konstruktivne interferencije samo onih zrakova čija je razlika puteva jednaka celobrojnom umnošku talasnih dužina. Putna razlika zrakova  $1'$  i  $2'$  reflektovanih sa ravni  $a$  i  $b$  je:

$$\delta = CB + BD = 2d \sin \theta$$

pa je Bragov uslov za konstruktivnu interferenciju dat jednačinom:

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (7.2.6)$$

gde je  $d$  rastojanje između paralelnih ravni,  $\theta$  ugao između upadnog (i reflektovanog) snopa i ravni kristala, a  $n$  je ceo broj. Bragov uslov daje pravac difrakcionog maksimuma za određenu familiju paralelnih ravni i talasnu dužnu  $\lambda$  i za dati red difrakcije  $n$ , u Bragovoj ravni određenoj pravcem upadnog i reflektovanog zraka. I Laueov i Bragov izraz za konstruktivnu interferenciju u osnovi su ekvivalentni. Prema Laueovom tumačenju, zračenje pada na kristal pod uglom  $\alpha_0$  i dolazi do difrakcije, Slika 7.2.10. Difraktovani zraci  $1'$  i  $2'$  se pojačavaju ako su u fazi, tj. ako je njihova putna razlika jednaka celobrojnom umnošku talasnih dužina. Sa Slike 7.2.10 putna razlika  $\delta$  je:

$$\delta = AC - BD = a \cos \alpha - a \cos \alpha_0 = a(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

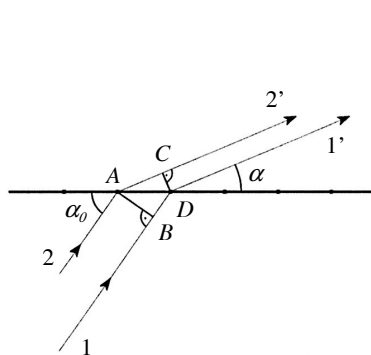
i kad je  $\alpha_0 = 90^\circ$  sledi da je Laueov uslov za konstruktivnu interferenciju:

$$\delta = AC - BD = a \cos \alpha = n\lambda. \quad (7.2.7)$$

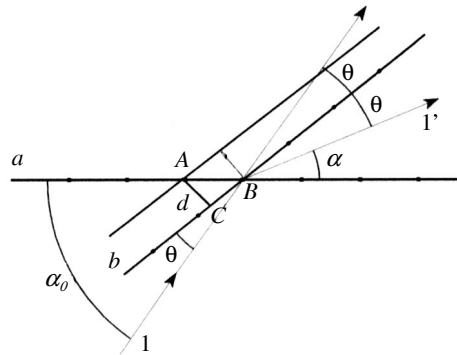
Prema Bragovom tumačenju, difrakciju shvatamo kao refleksiju sa određenog sistema ravni, Slika 7.2.11.

Tako zrak 1, koji u odnosu na ravan  $a$  pada pod uglom  $\alpha_0$  a difrakuje se pod uglom  $\alpha$ , zaklapa sa ravni  $b$  ugao  $\theta$  pod kojim se i reflektuje sa nje. Ravan  $b$  je jedna u nizu paralelnih mrežnih ravni na međusobnom rastojanju  $d$ . Iz malog trougla  $ABC$  sledi da je:

$$\sin(\alpha_0 - \theta) = \sin(90 - \theta) = \cos \theta = \frac{d}{a} \quad (7.2.8)$$



Slika 7.2.10 Difrakcija na jednodimenzionalnoj rešetki.



Slika 7.2.11 Zrak 1 se u odnosu na ravan  $a$  difrakuje dok se u odnosu na ravan  $b$  reflektuje.

Veličina  $a$  iz (7.2.8) zameni se u (7.2.7) i uzme se u obzir da je:

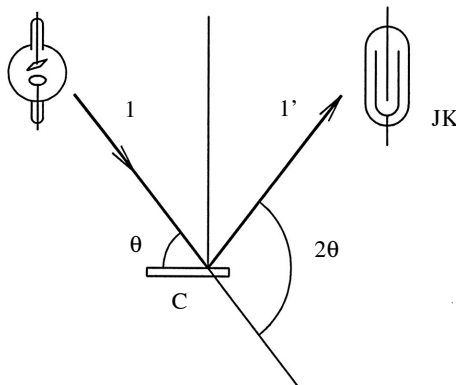
$$\alpha_0 = 2\theta + \alpha \Rightarrow \alpha = \alpha_0 - 2\theta = 90 - 2\theta$$

pa se dobija:

$$\frac{d \cos \alpha}{\sin(90 - \theta)} = \frac{d \cos \alpha}{\cos \theta} = \frac{d \sin 2\theta}{\cos \theta} = n\lambda \Rightarrow 2d \sin \theta = n\lambda.$$

Bragov uslov pojačavanja.

Šema eksperimentalnog uređaja za ispitivanje strukture kristala Bragovom metodom prikazna je na Slici 7.2.12. Paralelni snop monohromatskog zračenja pada na pljosni kristala koja je paralelna seriji ravni sa kojih želimo da dobijemo refleksiju. Difraktovano zračenje detektuje se pomoću jonizacione komore ili fotoemulzije. I kristal i detektor nalaze se na obrtnom postolju. U eksperimentu, pri obrtanju kristala oko ose normalne na Bragovu ravan za ugao  $\theta$ , detektor mora da se okrene za ugao  $2\theta$ . Pri uglovima između pravca upadnog snopa i pljosni kristala, koji zadovoljava Bragovu jednačinu, dobija se zacrtnjenje na filmu, odnosno porast struje u jonizacionoj komori.

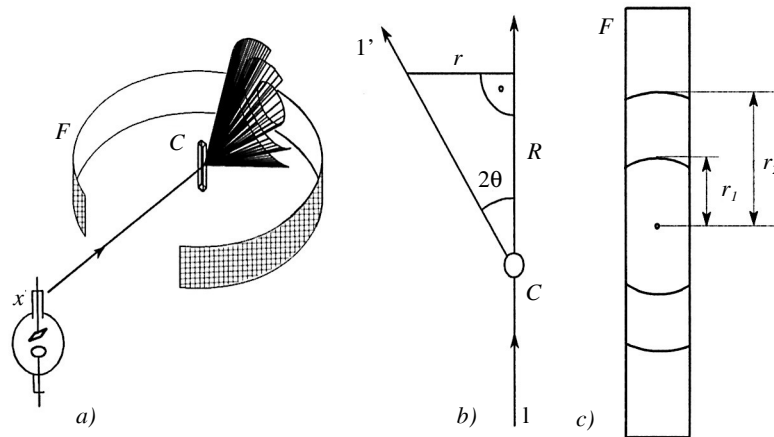


Slika 7.2.12 Šema eksperimentalnog uređaja po Bragu. Upadni snop  $x$ -zračenja  $1$  pada pod uglom  $\theta$  definisanim Bragovim uslovom na kristal  $C$  a difraktovani zraci  $1'$  se detektuju pomoću jonizacione komore  $JK$ .

### 7.2.3 Metod kristalnog praha (Debaj-Šererova metoda)

Iz Bragove jednačine sledi da konstruktivna interferencija zračenja reflektovanog ravnima kristalne rešetke može da se ostvari na više načina. Kristal može da se učvrsti, a da se upotrebi kontinualno rendgensko zračenje. Tada će ravni kristala da „odaberu” onu komponentu zračenja čija talasna dužina, za određeno rastojanje između ravni  $d$  i dati ugao  $\theta$  između snopa i ravni, zadovoljava uslov za konstruktivnu interferenciju (Laueova metoda). U Bragovoj metodi, upotrebljava se monohromatsko  $x$ -zračenje, a obrtanjem kristala traže se uglovi koji za određenu talasnu dužinu zadovoljavaju Bragovu jednačinu.

Treću varijantu predstavlja metoda kristalnog praha ili Debaj-Šererova metoda (P. Debye, P. Scherrer). Umesto dobro razvijenih monokristala koristi se kristalni prah. U kristalnom prahu kristalići su haotično usmereni, pa za svaku seriju ravni mogu da se nađu kristalići koji su u odnosu na upadni snop usmereni tako da zadovoljavaju Bragov uslov pri određenoj talasnoj dužini  $\lambda$ . Prema tome, uzorak fino sprasenog kristala stavlja se na put uskog snopa monohromatskog  $x$ -zračenja. Za detekciju difraktovanog zračenja koristi se film, cilindrično omotan oko uzorka, Slika 7.2.13. Ako je za odgovarajući tip ravni  $i$  za talasnu dužni  $\lambda$ , Bragov ugao  $\theta$ ,



Slika 7.2.13 Metoda praha: a)  $x$ -zračenje iz izvora pada na kristalni prah u ampuli  $C$  koja se nalazi u centru cilindrične komore poluprečnika  $R$  unutar koje je film  $F$ . Difraktovano zračenje predstavljeno je familijom konusa koje presecaju cilindrični film ostavljajući na emulziji zacrnjenja u vidu krivih različitog poluprečnika krivine  $r$ ; b) geometrijska veza između poluprečnika komore  $R$  i poluprečnika krivine  $r$  pri određenom uglu između upadnog i difraktovanog snopa,  $2\theta$ ; c) slika razvijenog filma.

tada difraktovani zrak gradi sa upadnim zrakom ugao  $2\theta$ . Kako su ravni ovog tipa (i svih drugih tipova) haotično raspoređene u prostoru, reflektovani zraci grade konus sa uglom otvora  $2\theta$ , oko pravca upadnog snopa. Ovi konusi formiraju na filmu tragove u obliku lukova (lukovi su delovi koncentričnih krugova čiji je centar trag koji na filmu daje upadni nedifraktovani zrak), od kojih svaki odgovara određenom tipu ravni odnosno redu refleksije  $n$ . Ako je  $R$  poluprečnik cilindrične komore, a  $r$  poluprečnik kruga, tada važi:

$$\frac{r}{R} = \operatorname{tg} 2\theta \sim \sin 2\theta \sim 2 \sin \theta.$$

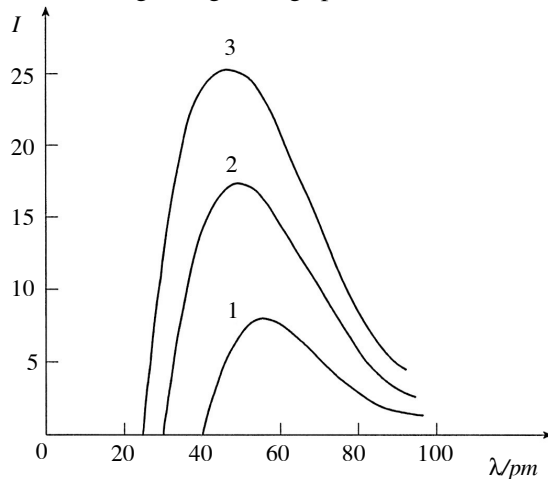
Kad se na osnovu prethodne jednakosti, u Bragovoj jednačini  $2 \sin \theta$  zameni sa  $r/R$  dobija se:

$$d \frac{r}{R} = n\lambda.$$

Tako, na osnovu poznate strukture kristala ( $d$ ) može da se odredi talasna dužina upotrebljenog  $x$ -zračenja pomoću eksperimentalno određene vrednosti  $r$  i poznatog poluprečnika komore  $R$ . Obrnuto, kad je poznata talasna dužina  $x$ -zračenja, može da se ispituje struktura kristala i da se odredi veličina  $d$ .

### 7.2.4 Kontinualno i karakteristično rendgensko zračenje

Pomenuli smo ranije, da  $x$ -zračenje nastaje u rendgenskim cevima, pri interakciji brzih elektrona sa atomima antikatode. Kad energija elektrona, kojima se bombarduje antikatoda, ne prelazi određenu vrednost, karakterističnu za materijal antikatode, nastaje  $x$ -zračenje koje, slično „beloj” svetlosti, ima kontinualni spektar. Ovo zračenje naziva se **zakočno rendgensko zračenje**. Zavisnost intenziteta od talasne dužine zakognog rendgenskog zračenja predstavljena je krivama na Slici 7.2.14, za antikatodu od volframa. Na slici su prikazana tri spektra nastala pri energijama elektrona od 30, 40 i 50 KeV, redom. Krive imaju maksimum i sa strane većih talasnih dužina asimptotski se približavaju nuli. Sa strane nižih talasnih dužina, pri nekoj određenoj talasnoj dužini  $\lambda_g$ , krive se strmo spuštaju ka nultoj vrednosti intenziteta. Sa slike se vidi da vrednost granične (najniže) talasne dužine kontinualnog rendgenskog spektra zavisi od energije elektrona pri čemu važi:



Slika 7.2.14 Kontinualni rendgenski spektar volframa. Krive 1, 2 i 3 odgovaraju energijama elektrona od 30, 40 i 50 KeV, redom. Preseci krivih sa apscisom predstavljaju granične talasne dužine kontinualnog spektra ( $\lambda_g$ ).

$\lambda_{1g} > \lambda_{2g} > \lambda_{3g}$  za  $E_1 < E_2 < E_3$  gde je  $\lambda_{1g}$ , granična talasna dužina kontinualnog rendgenskog spektra kad je energija elektrona  $E_1$ , itd. Ova talasna dužina obično se zove kratkotalasna granica kontinualnog rendgenskog spektra.

Zakočno (kontinualno)  $x$ -zračenje nastaje u interakciji brzih elektrona s atomima mete (antikatore). Na upadne elektrone, kao na naelektrisanе čestice, deluju jezgra atoma mete, menjajući im brzinu i oblik putanje, zbog čega dolazi do emisije elektromagnetnih talasa (rendgenskog zračenja). Frekvencija emitovanog zračenja zavisi od količine energije koju elektron izgubi pri takvoj interakciji. Energija  $E$  emitovana u jednoj sekundi zbog kočenja elektrona u polju jezgra atoma antikatore, prema klasičnoj (Maksvelovoj) elektromagnetnoj teoriji, može da se prikaže jedinačnom (pogledati poglavlje 9.3 i jednačinu 9.3.8):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|^2 \quad (7.2.9a)$$

pri čemu su  $e$ , naelektrisanje,  $\vec{r}$ , radijus vektor a  $\vec{v}$  brzina elektrona.  $c$  je brzina svetlosti a  $\epsilon_0$ , dielektrična konstanta vakuuma. Energija koja se emituje potpunim zaustavljanjem elektrona početne brzine  $v_0$ , za vreme  $\Delta t$  i pri stalnom usporenju elektrona,  $a$ :

$$\left( |\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \right) \text{ je:}$$

$$E = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \Delta t = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{(v_0)^2}{\Delta t}. \quad (7.2.9b)$$

Jednačina (7.2.9b) pokazuje da je emitovana energija veća ukoliko je usporenje elektrona  $a$  veće, odnosno početna brzina  $v_0$  elektrona veća, a  $\Delta t$  manje. Elektroni s većom početnom brzinom potpuno se zaustavljaju posle dužeg intervala  $\Delta t$  (u odnosu na elektrone s manjom početnom brzinom). Zbog kvadratne zavisnosti energije  $E$  od početne brzine elektrona  $v_0$ , a linearne zavisnosti od  $1/\Delta t$ , emitovana energija  $E$  veća je kod elektrona s većom početnom brzinom iako se oni zaustavljaju u većem intervalu vremena  $\Delta t$ . Razvijanjem funkcije  $E$  u Furijeov integral (videti poglavlje 8), dobija se kontinualni spektar s maksimumom energije čija se apscisa, s porastom početne energije elektrona, pomera ka kraćim talasnim dužinama u skladu s eksperimentalno dobijenim spektrima rendgenskog zračenja sa Slike 7.2.14. Pri razvijanju u Furijeov integral javljaju se, međutim, frekvencije proizvoljnih veličina, odakle proizlazi zaključak da spektar rendgenskog zračenja **ne sme** da bude ograničen ni sa jedne strane, a on to **jeste** sa strane kraćih talasnih dužina (već pomenuta kratkotalasna granica zakočnog rendgenskog zračenja). Ovo ukazuje na ograničenost primene klasične elektrodinamike na razmatranje ove pojave.

Kratkotalasna granica kontinualnog rendgenskog zračenja može da se objasni teorijom o postojanju kvanata energije ili fotona. Pri sudaru elektrona i jezgra mete menja se impuls i energija elektrona a pojavljuje se foton sa impulsom  $\vec{p}$  i s frekvencijom  $\nu$  odnosno sa energijom  $h\nu$ . Sa druge strane, jezgro atoma mete s masom  $M$ , koje je do interakcije sa elektronom mirovalo, dobija impuls  $\vec{p}_n$  i energiju  $E_n$ . Za ovu interakciju napisaćemo zakon o održanju impulsa i energije:

$$\vec{p}_e = \vec{p}'_e + \vec{p}_n + \vec{p} \quad (7.2.10)$$

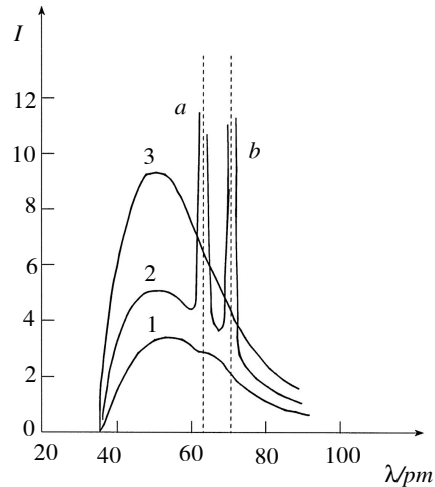
$$E_e + Mc^2 = E'_e + E_n + h\nu \quad (7.2.11)$$

gde su  $\vec{p}_e$  i  $\vec{p}'_e$  impulsi elektrona pre i posle sudara;  $E_e$  i  $E'_e$  su početna energija elektrona i energija elektrona posle sudara. Na osnovu detaljne analize ovako postavljenih jednačina sledi, da se foton može emitovati u bilo kom pravcu i sa energijom između nule i neke najveće vrednosti. Najveća vrednost energije emitovanih fotona jednaka je kinetičkoj energiji  $T$  ( $T = E_e - m_0c^2$ ) elektrona;  $m_0$  je masa mirovanja elektrona. Prema tome:

$$T = \frac{m_0 v^2}{2} = eU = h\nu = h \frac{c}{\lambda_g}. \quad (7.2.12)$$

Iz jednačine (7.2.12), u kojoj je  $h\nu$  energija emitovanog fotona ( $h$  je Plankova konstanta,  $e$  naelektrisanje elektrona, a  $c$  brzina svetlosti),  $T$  kinetička energija koju su elektroni stekli ubrzavanjem u električnom polju, pri čemu je napon između elektroda iznosio  $U$ , određuje se kratkotalasna granica kontinualnog rendgenskog spektra  $\lambda_g$ . Ovako izračunata vrednost kratkotalasne granice slaže se sa onom koja se dobija iz eksperimenta.

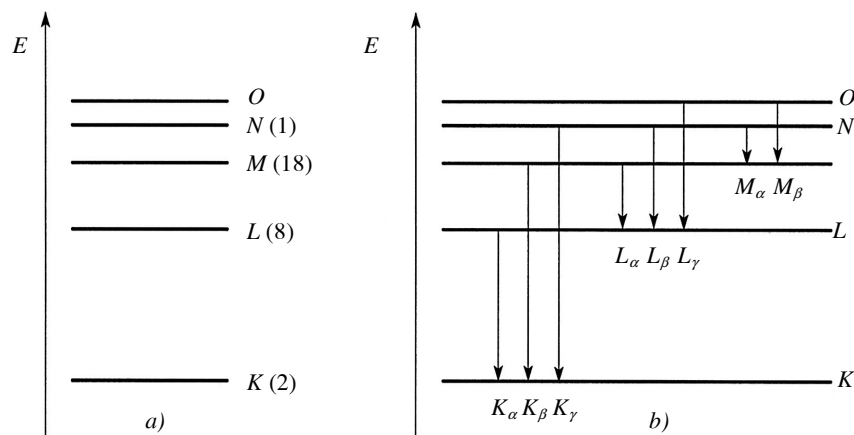
Na Slici 7.2.15 prikazana je kriva zavisnosti intenziteta rendgenskog zračenja od talasne dužine, za molibden, pri energiji elektrona od 35 keV. Na krivoj koja ima kontinualan oblik zapažaju se dva oštra maksimuma, pri strogo definisanim talasnim dužinama  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Oni odgovaraju spektralnim linijama karakterističnog rendgenskog zračenja.



Slika 7.2.15 Rendgenski spektri iridijuma (1), molibdena (2) i volframa (3) pri energiji upadnih elektrona od 35 keV. Na kontinualni spektar molibdena superponirana su dva oštra maksimuma na talasnim dužinama  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  što odgovara spektralnim linijama karakterističnog rendgenskog zračenja. Energija upadnih elektrona nije bila dovoljna za pobuđivanje rendgenskog karakterističnog spektra iridijuma i volframa.

Karakteristično rendgensko zračenje je drugi vid x-zračenja i ima diskretni ili linijski spektar, koji je tipičan (karakterističan) za određeni atom odnosno hemijski element. Takav spektar odlikava strukturu unutrašnjih energijskih nivoa atoma kao što optički spektar odražava energijski raspored spoljašnjih nivoa atoma. Mehanizam

emisije zračenja iz atoma uvek je isti bilo da je reč o karakterističnom rendgenskom zračenju (energija fotona reda veličine  $\text{KeV}$ -a) ili o zračenju mnogo manje energije (red veličine  $\text{eV}$ -a), jer prema Borovom tumačenju atom emituje energiju pri prelazu elektrona iz višeg u niže kvantno stanje. Kad se prelazi vrše između kvantnih stanja spoljašnjih elektrona (čija je energija veze reda veličine nekoliko  $\text{eV}$ ) nastaje optički spektar. S druge strane, karakteristično  $x$ -zračenje javlja se pri prelazu elektrona sa viših energijskih nivoa na  $K$ ,  $L$  ili  $M$  nivo, dakle, na nivoe koji imaju najveću energiju veze elektrona. Ovi unutrašnji nivoi atoma su, za razliku od spoljašnjih, potpuno ispunjeni elektronima: nivo  $K$  ( $n = 1$ ) sa dva elektrona; nivo  $L$  ( $n = 2$ ) sa osam elektrona; nivo  $M$  ( $n = 3$ ) sa 18 elektrona, itd., pa se pod normalnim uslovima prelazi na ove nivoe i ne događaju (sa  $n$  se označava glavni kvantni broj). Na Slici 7.2.16a kao primer data je šema energijskih nivoa bakra ( $\text{Cu}$ ), koji u atomskom omotaču ima 29 elektrona. Prelaz elektrona na  $K$ ,  $L$  ili  $M$  nivo postaje moguć ako se u ovim nivoima uprazni bar jedno elektronsko mesto. To se postiže bombardovanjem atoma elektronima (ili fotonima) velike energije, koji imaju energiju koja je jednaka ili je veća od energije veze elektrona  $K$ ,  $L$  ili  $M$  nivoa odgovarajućeg atoma.

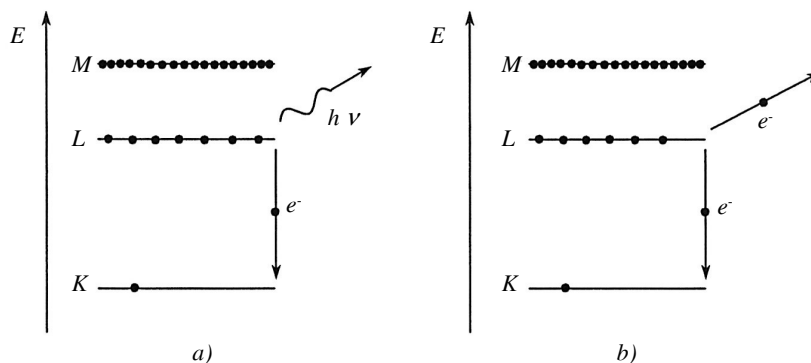


Slika 7.2.16 Šema energijskih nivoa atoma bakra; a) nivoi energije; b) spektar rendgenskog karakterističnog zračenja.

Vrednost ove energije možemo da izračunamo korišćenjem Borove jednačine za energiju elektrona u nivou određenim kvantnim brojem  $n$ . Na primer, za bakar ( $Z=29$ ), na osnovu jednačine:  $E = -hcR (Z-1)^2$ , za elektron u  $K$ -nivou ( $n = 1$ ) dobija se vrednost od  $10670 \text{ eV}$ . U prethodnoj jednačini,  $h$  je Plankova konstanta,  $c$  brzina svetlosti a  $R$  Ridbergova konstanta, dok je konstanta zaklanjanja 1. Ovi brzi elektroni (odnosno fotoni) pobuđuju ili jonizuju atom, stvarajući pri tome prazninu u nekom od unutrašnjih nivoa atoma ( $K$ ,  $L$ , ...). Nastala praznina, na primer u  $K$ -nivou, posle vrlo kratkog vremena ( $10^{-8}\text{s}$ ), popunjava se elektronom koji prelazi sa energijski višeg nivoa, što je praćeno emisijom  $x$ -kvanata energije  $h\nu$  koja odgovara razlici energija nivoa između kojih se dogodio prelaz. Dakle, rendgenski karakteristični spektri nastaju prelazom elektrona na  $K$ -nivo (sa  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , ...); na  $L$ -nivo (sa nivoa  $M$ ,  $N$ ); na  $M$ -nivo (sa nivoa  $N$ , ...). Spektralne linije koje nastaju prelazom elektrona na  $K$ -nivo označavaju se kao  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$ ,  $K_\gamma$  u zavisnosti od toga da li elektron prelazi sa  $L$



( $K_\alpha$ ), sa  $M$  ( $K_\beta$ ) ili  $N$  ( $K_\gamma$ ) nivoa. Spektralne linije koje prate prelaz na  $L$ -nivo označavaju se kao  $L_\alpha$ ,  $L_\beta$ ,  $L_\gamma$  zavisno od toga da li se prelaz vrši sa  $M$ ,  $N$  nivoa. Pri prelazu na  $M$  nivo, nastaje zračenje čije spektralne linije označavamo sa  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$ . Slika 7.2.16b. Napomenimo da svaki prelaz elektrona na upražnjeno mesto u nižem nivou, stvara novo prazno mesto, što za posledicu ima sukcesivne prelaze elektrona sa viših nivoa na donja upražnjena mesta, uz emisiju  $x$ -fotona odgovarajuće energije. Rendgenski spektri svih elemenata sastoje se od malog broja linija, koje su na sličan način raspoređene a imaju jednu istu finu strukturu.

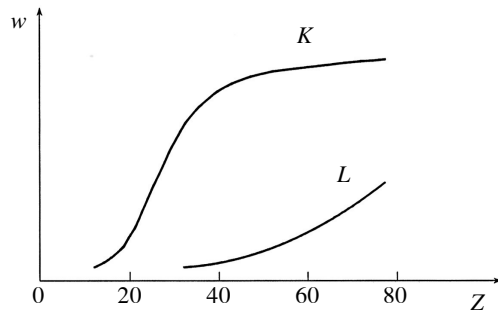


Slika 7.2.17 Tipovi prelaza: a) radijacioni; b) Ožegov.

Emisija  $x$ -zračenja ima i alternativni proces, a to je emisija Oževih elektrona. Pojava je nazvana u čast naučnika Pjera Ožea (Pierre Victor Auger), koji ju je otkrio 1937. godine. Naime, šupljina nastala u  $K$ ,  $L$ , nivou (zbog čega je atom u pobuđenom stanju) popunjava se elektronom sa višeg nivoa ali elektronski prelaz *ne* prati emisija  $x$ -kvanta sa energijom koja bi odgovarala razlici energija nivoa između kojih se prelaz dogodio. Na primer, kod prelaza elektrona sa  $L$  na  $K$ -nivo, ova razlika energije iznosi  $E_K - E_L$  gde su  $E_K$  i  $E_L$  energija nivoa  $K$  i  $L$  i njen ekvivalent se, kod Oževog efekta, troši za izbijanje elektrona iz nekog od viših energijskih nivoa, npr.  $M$  nivoa. U tom slučaju, elektron sa  $M$  nivoa biva udaljen iz atoma (atom se jonizuje) s kinetičkom energijom  $T$ , koja je jednaka  $T = (E_K - E_L) - E_{jM}$ , gde je  $E_{jM}$  energija veze elektrona u  $M$ -nivou (ili energija koja je potrebna da se elektron sa  $M$ -nivoa udalji iz atoma). Ožev proces dovodi do nastanka dve ili više novih šupljina u energijskim nivoima elektrona. Na Slici 7.2.17 šematski su predstavljeni radijacioni (emisija fotona) i Ožev (neradijacioni) procesi. Kad se uzmu u obzir oba procesa, radijacioni i Ožev, jasno je da intenzitet emitovanog  $x$ -zračenja zavisi od verovatnoće Oževog procesa.

Fluorescentni prinos  $w$  definiše se kao odnos broja emitovanih fotona rendgenskog zračenja u datoj spektralnoj seriji prema ukupnom broju nastalih praznina,  $N$  po jedinici vremena:

$$w = \frac{(nK_{\alpha 1} + nK_{\alpha 2} + nK_{\beta 1} + nK_{\beta 2} + \dots)}{N}$$

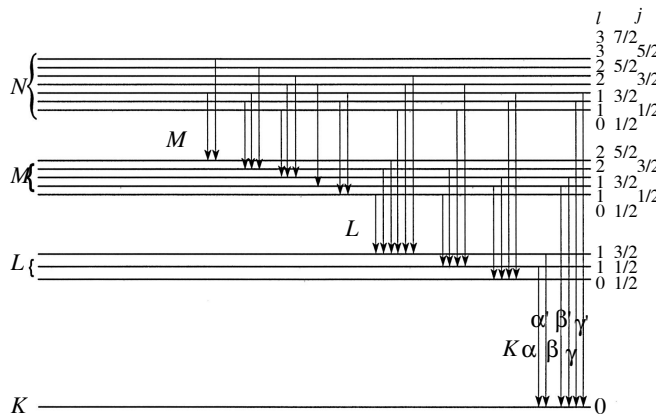


Slika 7.2.18 Fluorescentni prinos  $w$  za  $K$  i  $L$  rendgensku seriju u zavisnosti od rednog broja  $Z$ .

gde je  $nK_{\alpha 1}$ , itd. broj  $x$ -fotona odgovarajuće frekvencije. Očigledno je to da je Ožeev prinos jednak  $(1-w)$ . Za datu spektralnu seriju  $w$  raste s rednim brojem elementa  $Z$ . Ožeev prinos naročito je veliki kod lakih atoma, Slika 7.2.18.

### 7.2.5 Fina struktura rendgenskih spektralnih linija

Rendgenski spektri po svojoj prirodi su jednoelektronski spektri. Šema energijskih nivoa (termova) atoma s jednom prazninom, u inače popunjenoj elektronskoj ljusci, slična je onoj kod alkalnih atoma. Hajzenberg je još 1931. godine pokazao da je energijsko stanje atoma s jednom prazninom u odnosu na potpuno popunjeni energijski nivo ekvivalentno stanju atoma s jednim elektronom u određenom nivou. Kao i kod alkalnih atoma, svaki energijski nivo sastoji se od  $(2n-1)$  više ili manje bliskih podnivoa ( $n$  je glavni kvantni broj), Slika 7.2.19.

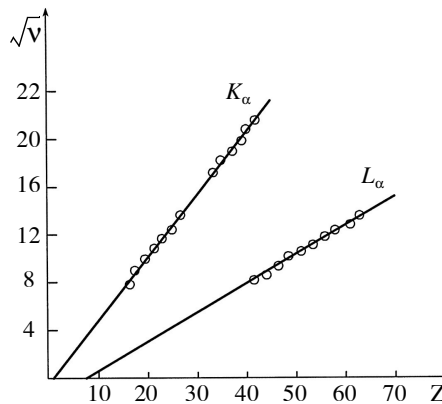


Slika 7.2.19 Fina struktura rendgenskih spektralnih linija.

Na levoj strani slike označeni su nivoi energije  $K$ ,  $L$ ,  $M$  (kojima odgovaraju vrednosti glavnog kvantnog broja  $n = 1, 2, 3, \dots$  redom), a desno je uz svaki podnivo napisana vrednost kvantnih brojeva  $l$  i  $j$ . Za prelaze važe pravila izbora:  $\Delta l = +1$  ili  $-1$ , a za  $\Delta j = 0, -1$  ili  $+1$ . Sa slike se vidi da su  $K_{\alpha}$ ,  $K_{\beta}$ , i  $K_{\gamma}$  dubleti. Dakle, možemo da zaključimo da linije  $K_{\alpha}$ ,  $K_{\beta}$ ,  $L_{\alpha}$ ,  $L_{\beta}$ , itd. imaju finu strukturu odnosno da se svaka od njih sastoji od nekoliko vrlo bliskih linija različitog intenziteta.

### 7.2.6 Mozlijev zakon

Rendgenski spektri svih elemenata imaju relativno mali broj spektralnih linija, koje su na sličan način raspoređene jedna u odnosu na drugu, a imaju istu finu strukturu. Pri povećanju rednog broja  $Z$  elementa, rendgenski spektar pomera se u kratkotalasnu oblast, ne menjajući svoju strukturu. Ova zakonitost izražena je zakonom Mozlija (H. G. J. Moseley, 1885-1915), prema kome je kvadratni koren frekvencije emitovanog rendgenskog zračenja određene serije, linearna funkcija rednog broja  $Z$  elementa, Slika 7.2.20. Mozlijevi eksperimenti u vreme kada su izvedeni imali su ogroman značaj za određivanje naelektrisanja jezgra atoma. Oni su i pokazali da su osobine atoma (a takva osobina je i frekvencija emitovanog  $x$ -zračenja) funkcija rednog (atomske) broja elementa.



Slika 7.2.20 Mozlijev zakon.

Na osnovu Borovog modela atoma ova empirijski otkrivena zakonitost (1913. godine) može da se prikaže jednačinom:

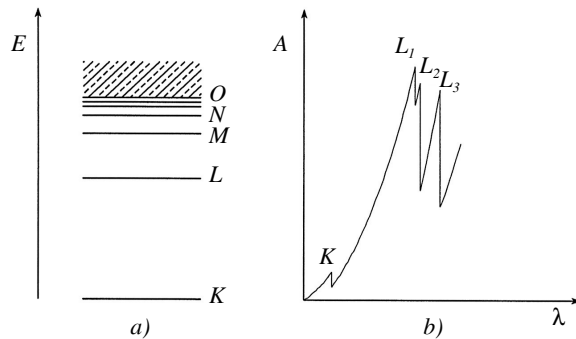
$$\sqrt{\nu} = R(Z - a) \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

U prethodnoj jednačini  $R$  je Ridbergova konstanta,  $c$  brzina svetlosti,  $n$  i  $k$  su prirodni brojevi ( $n < k$ ), dok je  $a$  konstanta zaklanjanja (vodi računa o uticaju drugih elektrona na efektivno naelektrisanje kojim jezgro deluje na elektron koji vrši prelaz). Za  $K$  seriju  $a = 1$ , za  $L$  seriju  $a = 7,5$ .

### 7.2.7 Rendgenski apsorpcioni spektri

Ako snop polihromatskog  $x$ -zračenja propustimo kroz neki materijal, nastaje rendgenski apsorpcioni spektar. Ovaj spektar nema linijsku strukturu, a nema ni oštre linije određene talasne dužine kao kod optičkog spektra u apsorpciji. On se sastoji iz traka s ostrim ivicama sa strana većih talasnih dužina. Kontinualnost rendgenskog apsorpcionog spektra ukazuje na to da jedno od dve energije stanja između kojih se događa apsorpcija nije kvantovano. Objasnimo ovo bolje. Apsorbujući energiju, elektron (npr. iz  $K$ -nivoa) može da pređe u neki od nezaposednutih optičkih nivoa ili u oblast iznad granice serije (granice jonizacije), Slika 7.2.21a. Ako se zna da su energijske razlike između optičkih nivoa zanemarljivo male u odnosu na energijski razmak između nivoa odgovornih za rendgenske spektre (red veličine  $eV$  i  $MeV$ ), zaključujemo da se apsorbuje energija koja je jednaka granici serije ili je za neki (bilo koji) iznos veća od nje. Ovo i uslovljava izgled apsorpcionog spektra koji je prikazan na Slici 7.2.21b. Oštra ivica sa strane većih talasnih dužina odgovara ap-

sorpciji granice  $K$  serije (apsorpciji energije koja je jednaka energiji jonizacije iz  $K$ -nivoa), a kontinualni spektar s leve strane ivice pokazuje da su elektroni prešli iz vezanog (kvantovanog) u slobodno (nekvantovano) stanje. Kod apsorpcije iz  $L$ -nivoa, javljaju se, sa strane većih talasnih dužina, tri oštre ivice koje odgovaraju trima talasnim dužinama (ili energijama). Ovo stoga što se  $L$  ( $n = 2$ ) nivo sastoji iz tri podnivoa, pa, praktično, postoje tri (ali dosta bliske) vrednosti energije za granicu  $L$  serije. Napomenimo da postojanje kontinuuma energije u apsorpciji ukazuje na to da je nastalo upražnjeno mesto u nekom od unutrašnjih slojeva atoma.



Slika 7.2.21 Poreklo apsorpcijskog spektra: a) šema energijskih nivoa; b) rendgenski apsorpcijski spektar. Oštre ivice sa definisanom talasnom dužinom odgovaraju vrednosti talasne dužine (energije) granice serije. Kod  $L$  serije granica je trostruka (jer se  $L$ -nivo sastoji od tri podnivoa), a u slučaju  $M$  serije granica je petostruka jer se  $M$ -nivo sastoji od pet podnivoa.

### Primeri

**Primer 7.2.1** Odrediti energije  $K$ ,  $L$  i  $M$ -nivoa atoma (a zatim ih predstaviti šematski) ako je  $\lambda_{K\alpha} = 2,75 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_{K\beta} = 2,54 \text{ \AA}$ , a talasna dužina koja odgovara granici  $K$ -serije iznosi  $\lambda_K = 2,49 \text{ \AA}$ . Kolika je talasna dužina  $L_{\alpha}$  linije? O kojem elementu je reč?

REŠENJE:

Izračunaćemo prvo energije koje odgovaraju  $K_{\alpha}$ ,  $K_{\beta}$  kvantima, odnosno kvantu granice  $K$  serije:

$$E_{K_{\alpha}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s})}{(2,75 \times 10^{-10} \text{ m})(1,602 \times 10^{-19} \text{ J})} = 4,515 \text{ keV},$$

Na sličan način dobija se za:

$$E_{K_{\beta}} = 4,940 \text{ keV}; E_K = 4,980 \text{ keV},$$

Energija  $K$ -nivoa je  $E_K = -4,980 \text{ keV}$ ,

$$E_L - E_K = E_{K_{\alpha}} = 4,515 \text{ keV}; E_L = -4,980 + 4,515 = -0,465 \text{ keV},$$

$$E_M - E_K = E_{K_{\beta}} = 4,940 \text{ keV}; E_M = -4,980 + 4,940 = -0,040 \text{ keV}.$$

Izračunajmo sada talasnu dužinu  $L_{\alpha}$  linije:

$$E_{L_{\alpha}} = E_M - E_L = -0,040 + 0,465 = 0,425 \text{ keV}; \lambda_{L_{\alpha}} = hc/E = 29 \text{ \AA}.$$

Primenjujući izraz:  $\nu = R(Z - 1)^2 (1/1^2 - 1/2^2)$  odredićemo o kojem elementu je reč:

$$(Z - 1)^2 = \frac{1}{(2,75 \times 10^{-10} \text{ m}) \times 0,75 \times (1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})} \Rightarrow Z = 22 \quad (\text{Ti})$$

**Primer 7.2.2** Pri ozračivanju atoma kriptona monohromatskim rendgenskim zračenjem talasne dužine  $\lambda$ , zapaženo je da u nekim slučajevima izleću iz atoma dva elektrona: fotoelektron oslobođen iz  $K$ -nivoa i elektron oslobođen Ožeevim efektom iz  $L$ -nivoa. Energija veze  $K$  i  $L$  elektrona su 14,4 i 3,0 keV, redom. Odrediti kinetičku energiju oba elektrona ako je talasna dužina upotrebljenog rendgenskog zračenja 0,65 Å.

REŠENJE:

Odredimo najpre energiju kvanta  $x$ -zračenja:

$$E_{\lambda} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}) \times (2,998 \times 10^8 \text{ m/s})}{(0,65 \times 10^{-10} \text{ m}) \times (1,602 \times 10^{-19} \text{ J})} = 19,1 \text{ keV}$$

pa je kinetička energija elektrona izbijenog sa  $K$ -nivoa:

$T_k = E_{\lambda} - E_K = 19,1 \text{ keV} - 14,4 \text{ keV} = 4,7 \text{ keV}$  a kinetička energija Ožeevog elektrona je:

$$T_{Oze} = (E_K - E_L) - E_L = (14,4 - 2,0) - 2,0 = 10,4 \text{ keV}.$$

### 7.3 KOMPTONOV EFEKT

#### DODATAK 7.3

##### D-7.3.1 Relativističke jednačine

Masa čestice koja se kreće brzinom  $v$  je:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{D-7.3.1})$$

gde je  $m_0$  masa mirovanja čestice, a  $c$  brzina svetlosti u vakuumu. Mehanički impuls  $\vec{p}$  (količina kretanja) je:

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v}. \quad (\text{D-7.3.2})$$

Ukupna energija slobodne čestice koja se kreće brzinom  $v$  je:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{D-7.3.3})$$

Iz (D-7.3.2) i (D-7.3.3) sledi:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (\text{D-7.3.4})$$

Iz (D-7.3.4) sledi:

$$\frac{1}{c} \vec{v} = \frac{c}{E} \vec{p}$$

što smenom u (D-7.3.3) daje:

$$E \sqrt{1 - \frac{p^2 c^2}{E^2}} = m_0 c^2$$

odakle se dizanjem na kvadrat cele jednačine dobija:

$$E^2 \left(1 - \frac{p^2 c^2}{E^2}\right) = (m_0 c^2)^2$$

a rešavanjem po  $E$  dobija se veza između ukupne energije relativističke čestice i njenog impulsa:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (\text{D-7.3.5})$$

Za slobodnu relativističku česticu (potencijalna energija je jednaka nuli), ukupna energija  $E$  predstavlja zbir kinetičke energije  $T$  i energije mase mirovanja:

$$E = T + m_0 c^2$$

odakle se zamenjivanjem u (D-7.3.5) dobija veza između impulsa i kinetičke energije čestice:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T^2 + 2 T m_0 c^2}. \quad (\text{D-7.3.6})$$

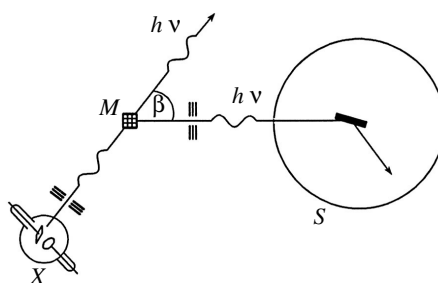
Za čestice čija je masa mirovanja jednaka nuli (foton, neutrino), iz (D-7.3.5) i (D-7.3.6) dobija se jednostavan odnos između energije i impulsa:

$$E = T = pc \Rightarrow$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{T}{c} = \frac{h\nu}{c}. \quad (\text{D-7.3.7})$$

Kad se čvrsto telo izloži dejstvu monohromatskog rendgenskog ili  $\gamma$ -zračenja dolazi do rasejavanja zračenja. U spektru rasejanog zračenja zapaža se, pod određenim eksperimentalnim uslovima, pored zračenja talasne dužine  $\lambda$ , koja odgovara talasnoj dužini upadnog snopa i zračenje nešto veće talasne dužine,  $\lambda'$ . Pomoću zakona klasične fizike nije se moglo objasniti zašto se u rasejanom snopu javlja i zračenje veće talasne dužine od talasne dužine upadnih talasa.

Kompton (Artur Holly Compton, 1892–1962, Nobelova nagrada za fiziku 1927), izveo je niz eksperimenata tokom 1922/23. godine ispitujući (Bragovim) spektrometrom sastav rasejanog rendgenskog zračenja. Na Slici 7.3.1 prikazana je šema Komptonovog oglada. Monohromatsko x-zračenje sa antikatode, posle prolaska kroz dijafragmu, pada na neko čvrsto telo sa kojeg se rasejava. Rendgenska cev može da se pomera, čime se menja ugao  $\beta$  između pravca upadnog snopa i pravca rasutog zračenja, koje dolazi do kristala rendgenskog spektrometra, pomoću kojeg se određuju njegova talasna dužina i intenzitet.

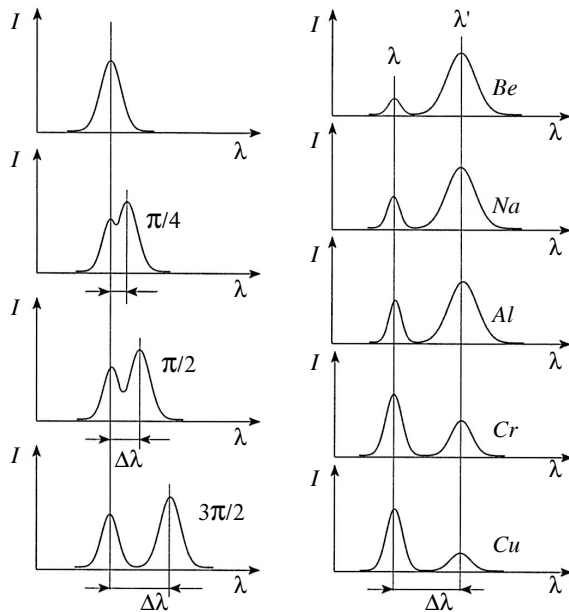


Slika 7.3.1 Šema Komptonovog eksperimenta. X-zračenje, rasejano sa čvrstog tela pod uglom  $\beta$  u odnosu na upadni snop, pada na kristal spektrometra S pomoću koga mu se određuju talasna dužina i intenzitet.

Spektri zračenja rasutog sa grafita, pri različitim uglovima  $\beta$ , prikazani su na Slici 7.3.2 (levo). Spektar prikazan na slici (osim kada je ugao  $\beta = 0$ , sadrži dva maksimuma i ukazuje na postojanje komponente zračenja s talasnom dužinom  $\lambda$ , koja odgovara talasnoj dužini upadnog zračenja, i komponente zračenja s promenjenom talasnom dužinom  $\lambda'$ . Razlika ovih dveju talasnih dužina ( $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ) raste s porastom ugla rasejavanja  $\beta$ . Na Slici 7.3.2 (desno) prikazani su spektri x-zračenja rasuti različitim elementima ali u istom pravcu  $\beta$ . Kod berilijuma koji je najlakši ( $A=9$ ) intenzitet komponente zračenja s promenjenom talasnom dužinom veći je od intenziteta komponente čija je talasna dužina ostala ista. S porastom atomske mase intenzitet komponente s promenjenom talasnom dužinom opada i u rasejanom zračenju preovladava komponenta čija se talasna dužina ne menja. Treba uočiti to da veličina promene talasne dužine ( $\Delta\lambda$ ) ne zavisi od prirode supstancije, već samo od ugla rasejavanja  $\beta$ .

Kako je već rečeno, Komptonovi eksperimenti nisu mogli da se objasne zakona klasične elektrodinamike prema kojima se zračenje uzima kao talasna pojava. Teorijsko objašnjenje efekta predložio je sam Kompton polazeći od pretpostavke da zračenje ima čestičnu prirodu, odnosno da se sastoji od diskretnih kvanata – fotona. Foton je čestica koja ima masu mirovanja jednaku nuli, određenu energiju  $h\nu$  ali i **impuls**  $h\nu/c$  [jednačina (D-7.3.7)], gde je  $h$  Plankova konstanta,  $\nu$  frekvencija, a  $c$  brzina svetlosti.

Efekt sada lako može da se kvalitativno objasni. Foton se elastično sudara sa slabo vezanim elektronom (uslov da je elektron slabo vezan, u stvari, znači da je energija veze elektrona u atomu zanemarljivo mala u odnosu na energiju koju elektron primi sudarom i da može da se potpuno zanemari u razmatranju pojave). Pri sudaru elektron preuzima deo energije fotona pa je njegova energija posle rasejavanja manja od energije pre rasejavanja. Pošto je talasna dužina obrnuto proporcionalna energiji ( $E=hc/\lambda$ ), rasejani foton ima veću talasnu dužinu od talasne dužine upadnog fotona. Pri tome, elektron napušta atom brzinom koja zavisi od iznosa primljene energije. Najveća energija koju elektron primi od fotona može da ga dovede do kretanja brzinom koja je bliska brzini svetlosti, pa za kvantitativno tumačenje pojave treba da se uzmu u obzir relativistički efekti i da se koriste odgovarajuće jednačine relativističke mehanike.

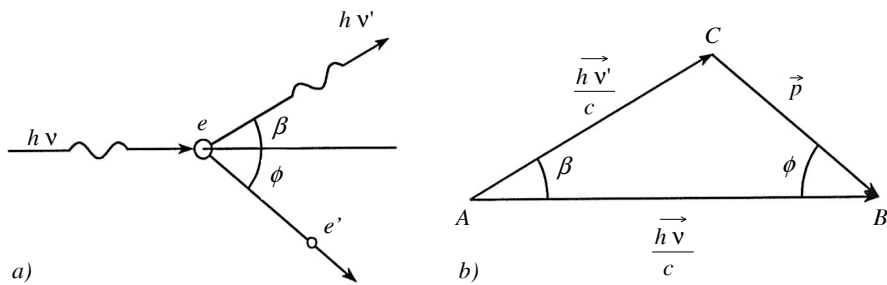


Slika 7.3.2 Prikaz Komptonovog efekta (levo): spektar  $x$ -zračenja rasutog na grafitu, pri raznim uglovima  $\beta$ ; (desno): spektar  $x$ -zračenja rasutog na raznim metalima pri stalnom  $\beta$ .

To su talasna dužina rasejanog  $x$ -zračenja  $\lambda$  i ugao rasejanja  $\beta$ . Pošto u zakone održanja ulaze impuls i energija elektrona koje neposredno ne merimo, oni treba da se pogodnim računskim transformacijama uklone.

Napišimo sada zakon o održanju energije:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \quad (7.3.1)$$



Slika 7.3.3 Elastični sudar fotona i elektrona: a) šematski prikaz; b) vektorski dijagram.

$h\nu$  je energija fotona pre sudara, a  $m_0c^2$  energija koja može da se pripiše elektrону u stanju mirovanja ( $m_0$  je masa mirovanja elektrona). Posle interakcije foton odlazi u

Za kvantitativni opis pojave služimo se jednostavnom slikom. Foton sa energijom  $h\nu$  i impulsom  $\vec{p}_v = \vec{h\nu}/c$  sudara se sa elektronom koji miruje, Slika 7.3.3a. Posle sudara foton nastavlja da se kreće sa impulsom  $\vec{p}_v$  pod uglom  $\beta$  u odnosu na prvobitni pravac kretanja, a elektron odlazi sa impulsom  $\vec{p}$  pod uglom  $\phi$ . Kako je u pitanju elastični sudar, važe zakoni o održanju energije i impulsa. To znači da zbir energija (i impulsa) slobodnog fotona i elektrona pre interakcije mora da bude jednak zbiru energija (i impulsa) fotona i elektrona posle rasejavanja. Naš cilj je da na osnovu ovih zakona i drugih opštih jednačina (veze između impulsa i energije) nađemo izraz koji povezuje eksperimentalnim putem merljive veličine.



pravcu  $\beta$  sa energijom  $h\nu'$  dok elektron odlazi sa energijom  $mc^2$ . U jednačini (7.3.1) energiju elektrona zamenjujemo ekvivalentnim izrazom (koji je funkcija impulsa elektrona), a na osnovu jednačine (D-7.3.5):

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}. \quad (7.3.2)$$

Zakon o održanju impulsa napisaćemo u vektorskom obliku:

$$\vec{p}_\nu = \vec{p}_{\nu'} + \vec{p} \quad (7.3.3)$$

pri čemu intenzitet impulsa fotona pre i posle rasejavanja iznosi  $h\nu/c$  i  $h\nu'/c$ , redom. Neka nam vektori impulsa fotona i elektrona predstavljaju stranice trougla ABC na Slici 7.3.3b. Ako na ovaj trougao odnosno vektorski dijagram primenimo kosinusnu teoremu dobijamo:

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu h\nu'}{c^2} \cos\beta = p^2$$

što posle sređivanja daje:

$$(h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' \cos\beta = p^2c^2. \quad (7.3.3')$$

U jednačini (7.3.2) prebacujemo  $h\nu'$  na levu stranu i tako transformisani izraz dižemo na kvadrat:

$$(7.3.2') \quad h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 + 2m_0c^2h\nu - 2h\nu h\nu' - 2m_0c^2h\nu' = p^2c^2.$$

Oduzmimo jednačinu (7.3.3') od jednačine (7.3.2'):

$$m_0c^2(\nu - \nu') - h\nu\nu'(1 - \cos\beta) = 0.$$

Podelimo gornju jednačinu sa  $\nu\nu'$  pa dobijamo izraz:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = 2\frac{h}{m_0c^2} \sin^2\frac{\beta}{2}. \quad (7.3.4)$$

Kako je  $\nu = c/\lambda$  ( $\lambda$  je talasna dužina) iz (7.3.4) dobija se:

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_0c} \sin^2\frac{\beta}{2}. \quad (7.3.5)$$

Veličina  $\lambda_C = h/m_0c$  zove se Komptonova talasna dužina i predstavlja kombinaciju tri univerzalne konstante: Plankove konstante  $h$ , mase mirovanja elektrona  $m_0$  i brzine svetlosti u vakuumu  $c$ . Komptonova talasna dužina  $\lambda_C$  iznosi  $0,0242 \text{ \AA}$ .

Na osnovu jednačine (7.3.5) sledi da promena talasne dužine rasejanog zračenja u odnosu na talasnu dužinu upadnog zračenja zavisi samo od ugla  $\beta$  ali ne i od talasne dužine upadnog zračenja  $\lambda$ . Za  $\beta = 0$  nema promene talasne dužine dok

je za  $\beta = \pi/2$  razlika u talasnoj dužini tačno jednaka Komptonovoj talasnoj dužini  $\lambda_c$ . Najzad, najveća promena talasne dužine dobija se za ugao  $\beta = \pi$ , kad se foton odbija nazad s talasnom dužinom  $\lambda' = 2\lambda_c = 0,048 \text{ \AA}$ . Kako promena talasne dužine ne zavisi od talasne dužine upadnog zračenja  $\lambda$ , sledi da je relativna promena talasne dužine veoma različita za upadno  $x$ -zračenje različitih talasnih dužina. Tako za  $x$ -zračenje s talasnom dužinom od  $100 \text{ \AA}$ , promena talasne dužine iznosi najviše 4% od upadne talasne dužine  $\lambda$ . Kod  $x$ -zračenja srednje tvrdoće ( $\lambda = 0,5 \text{ \AA}$ ) promena talasne dužine je oko 10% od upadne talasne dužine, a za  $\gamma$ -zračenje, promena talasne dužine je reda veličine same  $\lambda$ .

Teorijski izvedena jednačina (7.3.5) **tačno** tumači rezultate dobijene eksperimentom. Proračunajmo sada vrednosti kinetičke energije s kojom odlazi elektron posle Komptonovog rasejanja. Kinetička energija  $T$  elektrona biće jednaka razlici energija fotona pre i posle interakcije:

$$T = h\nu - h\nu' = h\Delta\nu \Rightarrow \frac{T}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu}. \quad (7.3.6)$$

Iz jednačine (7.3.4) dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} &= 2 \frac{h}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \Rightarrow \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{T}{h\nu} &= 2 \frac{h\nu'}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{2\lambda_c \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

**Primer** Neka upadno  $x$ -zračenje ima talasnu dužinu od  $\lambda = 0,242 \text{ \AA}$ . Kad je ugao rasejanja  $\beta = \pi/2$ :

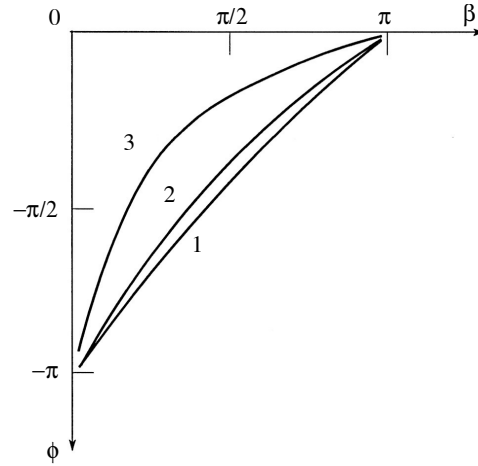
$$\frac{T}{h\nu} = \frac{2 \times 0,0242 \times 0,5}{0,242 + 0,0242} = \frac{1}{11}$$

što znači da elektron preuzima relativno mali deo energije (1/11) upadnog fotona. Izračunajmo sada  $T/h\nu$  kad je talasna dužina upadnog  $x$ -zračenja  $0,0242 \text{ \AA}$  pri istom uglu rasejanja:

$$\frac{T}{h\nu} = \frac{0,0242}{0,0242 + 0,0242} = \frac{1}{2}.$$

U ovom slučaju elektron dobija veći deo energije (1/2) fotona.

Odredimo sada pravac emitovanih elektrona. Sa Slike 7.3.3 sledi:



Slika 7.3.4 Povezanost uglova  $\beta$  i  $\phi$  izračunata na osnovu 7.3.10. Kriva 1 odnosi se na upadno zračenje talasne dužine  $\lambda = 0,01 \text{ \AA}$ , kriva 2 je izračunata za  $\lambda = 0,05 \text{ \AA}$ , a kriva 3 za  $\lambda = 0,1 \text{ \AA}$ .

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{-\frac{h\nu'}{c} \sin \beta}{\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos \beta} = \frac{-\sin \beta}{\frac{\nu}{\nu'} - \cos \beta}. \quad (7.3.8)$$

Vratimo se na jednačinu (7.3.4) koju ćemo napisati u obliku:

$$\frac{\nu}{\nu'} - 1 = 2 \frac{h\nu}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (7.3.9)$$

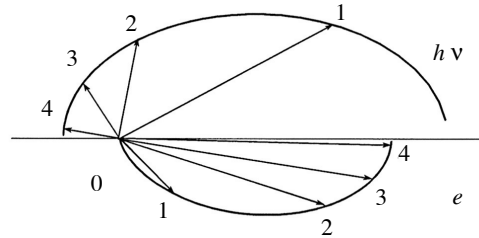
Zamenimo  $\nu/\nu'$  iz jednačine (7.3.9) u (7.3.8):

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{\sin \beta}{2 \frac{h\nu}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - \cos \beta + 1} = -\frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}}. \quad (7.3.10)$$

Na Slici 7.3.4 predstavljena je zavisnost ugla pod kojim odlazi elektron od ugla pod kojim se rasejava foton, kao grafički prikaz jednačine (7.3.10) za tri različite vrednosti talasne dužine  $\lambda$ .

Na Slici 7.3.5 su u obliku polarnog dijagrama prikazani pravci (i energije) rasejanog fotona i elektrona u Komptonovom efektu.

Slika 7.3.5 Polarni dijagram prikazuje pravce (i energije) rasejanog fotona i elektrona u Komptonovom efektu. Dijagram je nacrtan za talasnu dužinu upadnog zračenja  $\lambda = 0,01 \text{ \AA}$ . Pravac strelice označava pravac u kojem se rasejava foton odnosno elektron, dok je njena dužina srazmerna delu energije koju sa sobom nosi rasejani foton odnosno elektron. Odgovarajući par vektora označen je istim brojem. Grafik može da se nacrti na osnovu jednačine 7.3.7.

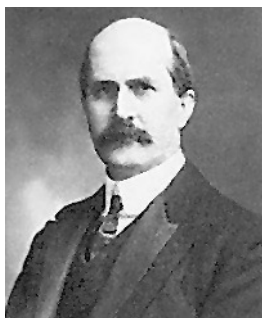


Još treba da rastumačimo zašto je kod težih atoma intenzitet linije s nepromenjenom talasnom dužinom znatno veći od one s promenjenom talasnom dužinom. Kod težih atoma velika je verovatnoća za sudar fotona i unutrašnjih, čvrsto vezanih elektrona. Tada iznete pretpostavke za elastično rasejavanje više ne važe i mora da se pretpostavi da u tom slučaju foton izmenjuje impuls i energiju s atomom u celini, pa se zbog velike mase atoma energija fotona praktično ne menja.

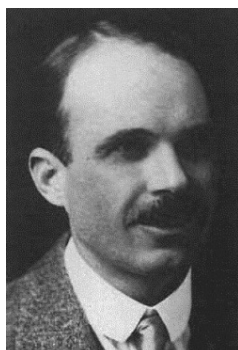


**Vilhelm Konrad Rendgen** (Wilhelm Konrad Röntgen, 1845–1923). Studirao je na Mašinskom fakultetu u Cirihi a bavio se eksperimentalnom fizikom kao asistent Avgusta Kunta (August Kundt, po njemu Kuntova cev). Po završetku studija postaje profesor na univerzitetima u Strazburu i Gisenu, gde predaje fiziku i teorijsku fiziku. Na univerzitetu u Virzburgu, čiji rektor kasnije postaje, predaje eksperimentalnu fiziku. Na ovom univerzitetu otkriva rendgensko zračenje, a 1901. godine za ovo otkriće dobija prvu Nobelovu nagradu za fiziku. Rendgen 1900. godine prelazi na univerzitet u Minhenu, na kome predaje do kraja života.

**Maks fon Laue** (Max von Laue, 1879–1960), rodio se u Pfaffendorfu (kod Koblenca, Nemačka). Bio je Plankov student i profesor u Cirihi, Frankfurtu, Berlinu i od 1946. godine direktor Instituta za fizičku hemiju i elektrohemiju u Berlinu. Njegov predlog da se kristali ozrače  $x$ -zracima prihvatili su Valter Fridrih (Walter Friedrich) i Paul Knipping (Paul Knipping) 1912. godine. Za objašnjenje opažene interferencione slike Laue je 1914. godine dobio Nobelovu nagradu za fiziku. Time je definitivno utvrđena talasna priroda  $x$ -zraka i prostorno periodična struktura kristala.

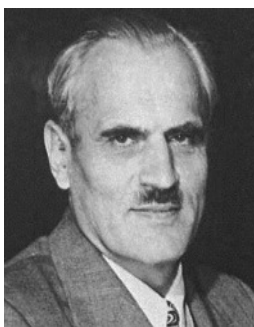


**Ser Viliem Henri Brag** (Sir William Henry Bragg, 1862–1942), rodio se u Vestwardu, Velika Britanija. Studirao je matematiku na Kembridžu a takođe i fiziku u čuvenoj Kevendiš laboratoriji. Kasnije postaje profesor fizike u Adelaidi (Australija), na Lidsu i na London koledžu, a hemiju predaje na Kraljevskom institutu. Bavi se istraživanjima u različitim oblastima fizike a do velikog otkrića dolazi 1913. i 1914. godine, kada, zajedno sa sinom Lorensom, postavlja temelje nove grane nauke, analize kristalne strukture pomoću  $x$ -zračenja. Otac i sin Brag pronalaze da se  $x$ -zračenje može koristiti za sistematsko izučavanje strukture kristala. Za ovo otkriće, Henri i Lorens Brag nagrađeni su 1915. godine Nobelovom nagradom za fiziku.



**Ser Viliem Lorens Brag** (Sir William Laureance Bragg, 1890–1971), sin je čuvenog fizičara H. Braga. Rođen je u Adelaidi. Godine 1919. postaje profesor u Mančesteru, a 1937. postaje direktor nacionalne fizičke laboratorije. Od 1938. je profesor u Kembridžu, a od 1953. na Kraljevskom institutu u Londonu. Kao dvadesetpetogodišnjak, zajedno sa svojim ocem H. Bragom, otkriva jednostavan i elegantan metod za određivanje talasne dužine rendgenskog zračenja difrakcijom na kristalima a samim tim postavlja i temelje metode za ispitivanje strukture kristala pomoću rendgenskog zračenja, rendgenske spektroskopije. Za ovo otkriće, zajedno s ocem H. Bragom, dobija 1915. godine Nobelovu nagradu za fiziku.

**Henri Mozli** (Henry Moseley, 1887–1915) je britanski hemičar. Raderfordov je učenik a briljantno je primenio  $x$ -zračenje na ispitivanje atomske strukture. Odredio je, metodom difrakcije na kristalima, frekvencije rendgenskog zračenja velikog broja hemijskih elemenata, od aluminijuma do zlata, i pokazao da su kvadratni koreni frekvencija linearna funkcija jedne veličine koju je označio sa  $Q$ , „a koja raste za konstantni iznos od jednog elementa do drugog”. Zaključio je da ta količina može samo da bude naelektrisanje atomskog jezgra i da ona odgovara rednom broju mesta koje određeni hemijski element zauzima u periodnom sistemu elemenata. Mozli je sa 28 godina poginuo u bici na Galipolju u Prvom svetskom ratu.



**Artur Holli Kompton** (Artur Holly Compton, 1892–1962), rodio se u Vusteru (Ohajo, SAD) i doktorirao na Princstonskom univerzitetu 1916. godine. Godine 1920. postaje profesor Vašington univerziteta u Sent Luisu, a 1923. Univerziteta u Čikagu. Od 1942. do 1945. godine bio je direktor Plutonijumskog istraživačkog projekta na Čikaškom univerzitetu a od 1945. do 1953. godine bio je i rektor Vašington univerziteta u Sent Luisu. Godine 1923, pretpostavljajući da foton poseduje određeni impuls, uspeo je da objasni promenu talasne dužine rendgenskih zraka pri rasejanju sa materije. Takode, on je prvi naučnik koji je dokazao totalnu refleksiju  $x$ -zraka. Isto tako, detaljno se bavio istraživanjem kosmičkih zraka. Za pronalazak efekta koji nosi njegovo ime Kompton je 1927. godine dobio Nobelovu nagradu za fiziku.

