

2. ATOM ELEKTRICITETA – ELEMENTARNO NAELEKTRISANJE

2.1 NAELEKTRISANJE ELEKTRONA – MILIKENOV OGLED

DODATAK 2.1

D-2.1.1 Elektrostatika sila

Na naelektrisanje q u električnom polju \vec{E} deluje sila \vec{F}_e koja je proporcionalna jačini polja i naelektrisanju:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}. \quad (\text{D-2.1.1})$$

Neposredno posle otkrića elektrona (J. J. Thomson, 1897), bilo je logično da se tačno odrede njegove osobine. Thomson je već odredio odnos naelektrisanja i mase elektrona e/m i pokazao da je taj odnos stalan. Sledeći logičan korak trebalo je da bude nezavisno i posebno određivanje mase i naelektrisanja. Međutim, ozbiljan problem predstavljala je činjenica da jedna od ovih veličina ne može da se meri nezavisno od druge. Pri svakom eksperimentu za merenje inercionih osobina elektrona (mase), mora da se uzme u obzir i njegovo naelektrisanje pošto elektron, u praksi, može da se ubrza samo električnim i magnetnim poljem. S druge strane, naelektrisanje bi moglo da se odredi nezavisno od mase, pod uslovom da je u ponovljenim ogledima uvek jedno te isto.

Osnovni problem pri eksperimentalnom određivanju atomskih i molekulskih osobina materije sastoji se u tome kako da mikroskopsku veličinu koju želimo da odredimo, povežemo sa makroskopskim pojavama i osobinama materije koje možemo da opažamo čulima ili uređajima. Drugim rečima, potrebno je smisliti ogled u kojem će se mikroskopske osobine materije ispoljiti na makroskopskim pojavama u obliku u kojem mogu tačno da se mere.

I pre Tomsonovih eksperimenata bilo je pokušaja da se proceni veličina jediničnog naelektrisanja. Godine 1881. Stonej (G. J. Stoney) procenio je da je $e = 3 \times 10^{-11}$ e.s.j. ($e = 1 \times 10^{-20}$ C), što je približno deset puta manje od prave vrednosti. Uzgred rečeno, Stonej je bio taj koji je 1891. godine predložio naziv **elektron** za „prirodnu” jedinicu naelektrisanja.

Još bolju procenu vrednosti jediničnog naelektrisanja učinio je Mejer (O. E. Meyer) na osnovu kinetičke teorije, $e = 3 \times 10^{-10}$ e.s.j. ($e = 1 \times 10^{-19}$ C). Sličnu vrednost dobio je i Taunsend (J. S. E. Townsend) koji je, radeći u Tomsonovoj laboratoriji, posmatrao brzinu taloženja naelektrisanog oblaka vodene pare. Godine 1903. sličan eksperiment pokušali su da ponove nezavisno Tomson i Vilson (J. J. Thomson i H. A. Wilson) ne bi li dobili tačniju vrednost, ali bez većeg uspeha. Glavnu teškoću predstavljalo je reprodukovanje potpuno jednakih uslova prilikom građenja naelektrisanih oblaka.

Eksperimentalno određivanje naelektrisanja elektrona prvi je uspešno obavio, 1911. godine, Robert Miliken (Robert A. Millikan, 1863–1953) za šta je dobio Nobelovu nagradu 1923. godine. Miliken je ubedljivo pokazao diskretnost naelektrisanja i dao značajan doprinos atomskoj teoriji o strukturi materije. U prvoj dekadi dvadesetog veka bilo je još onih koji su smatrali da teorija kontinualnog naelektrisanja i materije može jednako dobro da objasni sve do tada poznate eksperimentalne činjenice.

Za određivanje naelektrisanja elektrona, Miliken je smislio genijalno jednostavan ogled u kojem je posmatrao kretanje naelektrisanih kapljica ulja u vazduhu pod uticajem električnog polja i Zemljine težine.

Pod uticajem Zemljine težine na kapljicu mase m_k deluje sila, \vec{F}_g :

$$\vec{F}_g = m_k \vec{g}. \quad (2.1.1)$$

Pošto je potopljena u fluid (vazduh) gustine d_v , na kapljicu deluje i sila potiska \vec{F}_p , koja je jednaka težini kapljicom istisnutog vazduha:

$$\vec{F}_p = -m_v \vec{g}. \quad (2.1.2)$$

Na kapljicu poluprečnika a , koja pod uticajem sile Zemljine težine pada kroz vazduh brzinom \vec{v} , deluje sila trenja \vec{F}_{tr} , kao posledica viskoznosti vazduha:

$$\vec{F}_{tr} = -6\pi\eta a \vec{v} \quad (2.1.3)$$

gde je η koeficijent viskoznosti vazduha. Zbog ubrzanog padanja kapljice njena brzina raste, pa otuda raste i sila trenja koja je proporcionalna brzini padanja. Pri nekoj graničnoj brzini padanja \vec{v}_g , uspostavlja se ravnoteža sila, $\vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_{tr} = 0$ (ili $F_g - F_p = F_{tr}$) i kapljica pada stalnom graničnom brzinom v_g :

$$(m_k - m_v) g = 6 \pi a v_g. \quad (2.1.4)$$

Ako znamo gustinu kapljice d_k i gustinu vazduha d_v , odgovarajuće mase iz izraza (2.1.4) možemo da izrazimo preko zapremine kapljice V_k :

$$m_k = d_k V_k \quad m_v = d_v V_k. \quad (2.1.5)$$

Tada iz izraza (2.1.4) dobijamo:

$$V_k g (d_k - d_v) = 6 \pi \eta a v_g \quad (2.1.6)$$

ili, s obzirom na to da je $V_k = 4 \pi a^3 / 3$, posle skraćivanja:

$$2a^2 (d_k - d_v) g = 9\eta v_g. \quad (2.1.7)$$

Iz izraza (2.1.7), pošto su nam gustine kapljice i vazduha poznate, kao i viskoznost vazduha, merenjem brzine kojom kapljica pada pod uticajem sile Zemljine težine, možemo da odredimo njen poluprečnik:

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v_g}{2(d_k - d_v)g}}. \quad (2.1.8)$$

U ovom slučaju, za povezivanje makroskopski merljivih veličina i mikroskopskih veličina koje želimo da odredimo (dimenzije kapljice su tako male da ne mogu da se odrede neposrednim putem, na primer, pomoću mikroskopa), iskorišćen je Stoksov zakon.

Razmotrimo sada kretanje iste kapljice koja nosi naelektrisanje q u električnom polju E . Na kapljicu tada deluje dodatna elektrostatička sila \vec{F}_e , saglasno izrazu (D-2.1.6). Pravac električnog polja E može da se odabere tako da se pod njegovim uticajem kapljica kreće naviše. Tada se pri dostizanju granične brzine kretanja kapljice v_e , u ravnoteži nalaze sve četiri sile:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_e = 0, \quad (2.1.9)$$

ili pošto potisak i električno polje deluju u jednom smeru (na gore), a Zemljina teža i trenje u drugom (nadole):

$$F_g + F_{tr} = F_p + F_e. \quad (2.1.10)$$

Zamenom sila iz jednačina (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) i (D-2.1.1) u izrazu (2.1.10) i preuređivanjem dobijamo:

$$(m_k - m_v)g + 6\pi\eta av_e = qE, \quad (2.1.11)$$

a zamenom prvog člana iz jednačine (2.1.4):

$$6\pi\eta av_g + 6\pi\eta av_e = qE. \quad (2.1.12)$$

Odatle se za naelektrisanje kapljice dobija:

$$q = 6\pi a\eta \frac{v_g + v_e}{E}. \quad (2.1.13)$$

Konačno, uvrštavajući poluprečnik kapljice iz jednačine (2.1.8), dobijamo izraz pomoću kojeg može da se odredi apsolutno naelektrisanje kapljice, na osnovu merenja brzine njenog kretanja u električnom polju i van njega:

$$q = \frac{9\pi}{E} \sqrt{\frac{2\eta^3 v_g}{(d_k - d_v)g}} (v_g + v_e). \quad (2.1.14)$$

Ako se za vreme oglada kapljica preelektriše (promeni naelektrisanje), tada će za novo naelektrisanje q' kapljica da ima i novu brzinu v_e' :

$$q' = \frac{9\pi}{E} \sqrt{\frac{2\eta^3 v_g}{(d_k - d_v)g}} (v_g + v_e'). \quad (2.1.15)$$

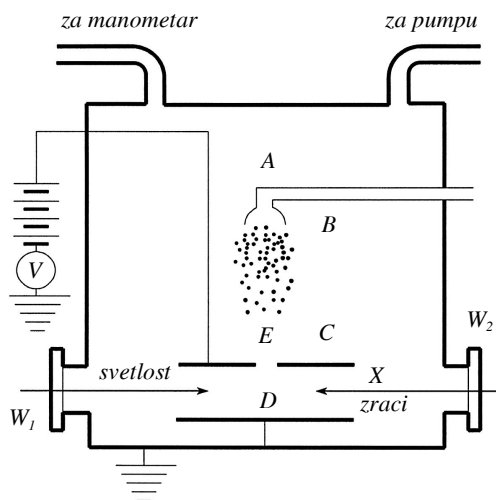
Pošto u toku eksperimenta sa jednom istom kapljicom može da se izvrši veliki broj merenja, pri čemu kapljica može i da se preelektriše, tada se promena količine naelektrisanja $\Delta q = q' - q$ dobija iz razlike izraza (2.1.14) i (2.1.15):

$$\Delta q = \frac{9\pi}{E} \sqrt{\frac{2\eta^3 v_g}{(d_k - d_v)g}} (v_E' - v_E). \quad (2.1.16)$$

Izvedeći brojne ogleda preelektrisanja kapljica, Miliken je pronašao, saglasno očekivanjima, da se preelektrisanje odvija skokovito. Pri tome je utvrdio da svako preelektrisanje može da se izrazi kao celobrojni umnožak jedinice naelektrisanja e koja iznosi:

$$e = 1,592 \times 10^{-19} \text{ C}. \quad (2.1.17)$$

Za praktično ostvarenje ovog ogleda potrebno je da se vrlo dobro odrede i da se proveravaju brojni eksperimentalni parametri koji neposredno ili posredno mogu da utiču na ishod eksperimenta. To znači da je neophodna puna kontrola promenljivih s desne strane jednačine (2.1.16). Na Slici 2.1.1 šematski je prikazana Milikenova aparatura za određivanje naelektrisanja elektrona. Električni kondenzator sa paralelnim pločama C , D , smešten je u komoru A u kojoj pritisak vazduha može da se menja i meri pomoću pumpe i manometra. Kapljice ulja obrazovane raspršivačem B , pod uticajem gravitacije padaju na gornju ploču kondenzatora na kojoj se nalazi mali otvor E .



Slika 2.1.1 Milikenova aparatura za određivanje naelektrisanja elektrona.

Kada se primeti da je kapljica ulja prošla kroz otvor, on se zatvori, a vazduh između ploča kondenzatora jonizuje se x -zracima koji prolaze kroz prozorčić W_2 . Kapljica ulja zahvatajući gasni jon i sama postaje naelektrisana, pa tim i podložna delovanju električnog polja kondenzatora. S obzirom na to da pravac i jačina polja mogu da se menjaju proizvoljno, u kombinovanom električnom i gravitacionom polju naelektrisana kapljica kreće se naviše ili naniže. Kroz prozorčić, W_1 ulazi jak snop svetlosti koji se na kapljici raspršuje, a što se opaža durbinom postavljenim normalno na pravac upadnog snopa. Zbog izuzetno malih dimenzija, kapljica se vidi samo kao svetla tačkica na tamnoj podlozi. Brzina padanja kapljice v_g pod uticajem gravitacionog polja određuje se tako što se

meri vreme njenog prolaska između dva podeoka na okularu durbina. Za to vreme baterija kojom se napaja kondenzator je isključena, a ploče kondenzatora su kratko spojene. Zatim se između ploča uspostavi visoki napon 5000–10000 volti (koji se

meri voltmetrom V) i to tako da se kapljica pod uticajem električnog polja kreće na više. Ponovo se meri vreme prolaska kapljice između dva podeoka, ovoga puta pod uticajem i električnog i gravitacionog polja, iz čega se određuje brzina v_e . Na osnovu tih merenja naelektrisanje kapljice određuje se primenom izraza (2.1.14). Ako se između dva merenja kapljica preelektriše, određivanjem nove brzine kretanja kapljice v_e' , pomoću izraza (2.1.16), izračunava se promena naelektrisanja kapljice.

Merenjem naelektrisanja velikog broja kapljica, Miliken je našao da sva naelektrisanja mogu da se izraze kao celobrojni umnošci najmanje količine naelektrisanja. On je tu količinu naelektrisanja označio kao naelektrisanje jednog elektrona. Najbolji rezultat koji je Miliken dobio, jednačina (1.2.17), vrlo je blizak danas prihvaćenoj najboljoj vrednosti:

$$e = -1,602176462(63) \times 10^{-19} \text{ C.} \quad (2.1.18)$$

Deljenjem njegovog eksperimentalnog rezultata za e sa poznatom vrednošću za odnos e/m , Miliken je izračunao masu elektrona. Najtačnija vrednost za masu elektrona, koja je danas prihvaćena, iznosi:

$$m_e = 9,10938188(72) \times 10^{-31} \text{ kg.} \quad (2.1.19)$$

Naelektrisanje e iz jednačine (2.1.18) predstavlja osnovni kvant (atomsku jedinicu) naelektrisanja. Naelektrisanja svih čestica otkrivenih u prirodi su celobrojni umnošci ovog osnovnog kvanta naelektrisanja, tj. naelektrisanja su uvek $0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e$, itd. U slučaju jona ovo pravilo kvantovanja je očigledno: jon je atom ili molekul koji je izgubio ili primio jedan ili više elektrona, pa je otuda njegovo naelektrisanje celobrojni umnožak elementarnog naelektrisanja. Međutim, pravilo kvantovanja naelektrisanja takođe važi i za subatomske čestice i sve elementarne čestice. Na primer, naelektrisanje neutrona je nula, protona $+e$, alfa-čestice (jezgra helijuma) $+2e$, miona $-e$, pozitivnog piona $+e$, itd.

Odkora, mnogo se radi na pronalaženju naelektrisanja $\pm e/3$ i $\pm 2e/3$, koja odgovaraju kvarkovima od kojih su sačinjeni protoni i neutroni (videti 12. poglavlje). Međutim, do danas, takvo podeljeno (frakciono) naelektrisanje, niti bilo koje drugo, nije pronađeno. Iz nedavno izvršenih merenja sledi da na svakih 10^{19} protona može da se pojavi manje od jednog slobodnog kvarka. Drugim rečima, najmanje slobodno naelektrisanje opaženo eksperimentalnim putem je elementarno naelektrisanje elektrona.

Primeri

Primer 2.1.1 Kolika potencijalska razlika treba da se uspostavi između kondenzatorskih ploča čiji razmak iznosi 5 mm, da bi se uravnotežila kapljica ulja koja nosi naelektrisanje jednako petostrukom naelektrisanju elektrona? Masa kapljice iznosi $3,119 \times 10^{-13} \text{ g}$.

REŠENJE:

Iz uslova za ravnotežu elektrostatičke i gravitacione sile dobijamo:

$$qE = mg.$$

Električno polje kondenzatora sa paralelnim pločama količnik je potencijalske razlike između ploča i njihovog međusobnog rastojanja:

$$E = \frac{U}{S}.$$

Iz ova dva izraza sledi da je potencijalska razlika U :

$$U = \frac{mgs}{q}$$

ili, s obzirom na to da je $q = 5e$, $s=0,005$ m, $m = 3,119 \times 10^{-16}$ kg, i $g = 9,81$ m/s²:

$$U = \frac{3,119 \times 10^{-16} \times 9,81 \times 0,005}{5 \times 1,6 \times 10^{-19}}$$

$$U = 19,1 \text{ V}.$$

Zadaci

Z–2.1.1 Izračunati brzinu padanja kapljice ulja gustine 0,98 g/cm³, sa poluprečnikom 10⁻⁴ cm, u vazduhu čiji je koeficijent viskoznosti 1,832x10⁻⁴ poaza.

[0,0117 cm/s]

Z–2.1.2 Potencijalska razlika od 31,5 V saopštena kondenzatorskim pločama koje su međusobno udaljene 1 cm, održava kapljicu ulja u kretanju naviše brzinom od 10 podeoka za 10 sekundi (50 podeoka = 1 mm). Brzina padanja pod dejstvom sile teže iznosi 10 podeoka za 100 sekundi. Koeficijent viskoznosti vazduha je 1,8 x 10⁻⁴ P (gcm⁻¹ s⁻¹). Gustina kapljice je 0,90 g/cm³. Koliko elektrona nosi kapljica? [1]

2.2 KRETANJE ELEKTRONA (NAELEKTRISANE ČESTICE) U ELEKTRIČNOM I MAGNETNOM POLJU

DODATAK 2.2

D–2.2.1 Prikazivanje II Njutnovog zakona

II Njutnov zakon najčešće se predstavlja preko ubrzanja, u obliku koji je dat izrazom (D–1.2.2):

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (\text{D-2.2.1a})$$

S obzirom na vezu između ubrzanja \vec{a} , brzine \vec{v} i pređenog puta \vec{s} ,

$$\vec{a} = \vec{v}' = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{s}'' = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}.$$

II Njutnov zakon može da se izrazi i jednačinama:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v}' \quad (\text{D-2.2.1b})$$

$$\vec{F} = \frac{m d^2 \vec{s}}{dt^2} = m\vec{s}'' \quad (\text{D-2.2.1c})$$

Imajući na umu da je masa tela stalna i da je impuls (količina kretanja) proizvod mase i brzine:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

iz jednačine (D-2.2.1b) dobijamo još jedan način za izražavanje sile \vec{F} :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{D-2.2.1d})$$

D-2.2.2 Vektori

U desnom ortogonalnom koordinatnom sistemu definisana su tri jedinična vektora \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} koji deluju redom u pravcu x -, y - i z -ose. Tada, proizvoljni vektori \vec{A} i \vec{B} mogu da se predstave zbirom njihovih komponenta u pravcima x , y i z :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}.$$

a) Skalarni proizvod dva vektora, \vec{A} i \vec{B} , dobija se množenjem komponenta, član po član:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

ili s obzirom na to da je posmatrani sistem ortogonalan, tj.:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \angle \vec{A}, \vec{B} \quad (\text{D-2.2.2})$$

(skraćeno, isti uslov može da se iskaže: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \delta_{ij}$; $\delta_{ij} = 1$ ako je $i = j$ i $\delta_{ij} = 0$ ako je $i \neq j$). Projekcija vektora na proizvoljno izabrani pravac je skalarni proizvod tog vektora i jediničnog vektora na izabranom pravcu;

b) Vektorski proizvod dva vektora, \vec{A} i \vec{B} , nalazimo iz determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \begin{matrix} (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} \\ + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} \\ + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \end{matrix} \quad (\text{D-2.2.3a})$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\angle\vec{A},\vec{B}. \quad (\text{D-2.2.3b})$$

Vektorski proizvod je novi vektor, normalan na ravan u kojoj leže početni vektori a čiji je smer određen pravilom desne ruke. Geometrijski, intenzitet vektorskog proizvoda predstavlja površinu romboida čije se ivice poklapaju sa vektorima koji se množe.

Posebni slučajevi:

\vec{A}, \vec{B} paralelni:

$$\sin\angle\vec{A}\vec{B} = 0, \quad \vec{A} \times \vec{B} = 0$$

\vec{A}, \vec{B} normalni:

$$\sin\angle\vec{A}\vec{B} = 1, \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|.$$

Primer 1.

$$\vec{A} = A_x\vec{i}, \quad \vec{B} = B_x\vec{i}, \quad \vec{A} \times \vec{B} = 0.$$

Primer 2.

$$\vec{A} = A_x\vec{i}, \quad \vec{B} = B_y\vec{j}, \quad \vec{A} \times \vec{B} = A_xB_y\vec{k};$$

c) Mešoviti proizvodi tri vektora, \vec{A}, \vec{B} i \vec{C} je skalar:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= |\vec{A}|(\vec{B} \times \vec{C}) \cos\angle\vec{A},(\vec{B} \times \vec{C}) \\ &= |\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}| \cos\angle\vec{A},(\vec{B} \times \vec{C}) \sin\angle\vec{B},\vec{C}. \end{aligned} \quad (\text{D-2.2.4a})$$

Geometrijski, mešoviti proizvod predstavlja zapreminu paralelopipeda čije se ivice poklapaju sa vektorima koji se množe. Pri tome, vektorski deo proizvoda daje bazu a iz skalarnog se dobija visina paralelopipeda. Iz činjenice da zapremina paralelopipeda ne zavisi od načina na koji se definiše njegova baza, sledi važna, očigledna relacija:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}). \quad (\text{D-2.2.4b})$$

Drugim rečima, mešoviti proizvod se ne menja pri kružnim zamenama vektora.

D-2.2.3 Lorencova sila

Na naelektrisanje q koje se kreće brzinom \vec{v} u električnom polju \vec{E} i magnetnom polju \vec{B} , deluje sila \vec{F} :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (\text{D-2.2.5})$$

U električnom polju, $\vec{B} = 0$

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

U magnetnom polju:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (\text{D-2.2.6a})$$

ili, imajući na umu izraz (D-2.2.1b):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (\text{D-2.2.6b})$$

D-2.2.4 Rešavanje diferencijalne jednačine $d\vec{\beta}/dt = k\vec{\beta} \times \vec{B}$

Vektorska diferencijalna jednačina tipa:

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} = k\vec{\beta} \times \vec{B} \quad (\text{D-2.2.7})$$

javlja se kod problema povezanih s obrtnim kretanjem i sa pojavama u magnetnom polju [jednačina (D-2.2.6b)]. U zavisnosti od problema koji se rešava, vektori $\vec{\beta}$ i \vec{B} i skalar k mogu da imaju različiti fizički smisao. Međutim, postupak za rešavanje jednačine (D-2.2.7) ne zavisi od njenog fizičkog tumačenja. Primenom pravila za vektorski proizvod, izraz (D-2.2.3a), na jednačinu (D-2.2.7) ova se prevodi u odgovarajući sistem skalarnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_x}{dt} &= k(\beta_y B_z - \beta_z B_y) \\ \frac{d\beta_y}{dt} &= k(\beta_z B_x - \beta_x B_z) \\ \frac{d\beta_z}{dt} &= k(\beta_x B_y - \beta_y B_x). \end{aligned} \quad (\text{D-2.2.8})$$

Rešavanje ovog sistema u opštem slučaju [na primer $\vec{\beta} = \vec{\beta}(x, y, z, t)$ i $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$] predstavlja težak matematički problem. Međutim, u jednostavnijim slučajevima, koji i imaju najveći praktični značaj, sistem (D-2.2.8) može lako da se reši bez problema. Razmotrićemo najjednostavniji slučaj kada su intenziteti vektora $\vec{\beta}$ i \vec{B} stalni: $|\vec{\beta}| = \text{const.}$, $|\vec{B}| = \text{const.}$ Problem može da se dalje pojednostavi izborom pogodnog koordinatnog sistema. Na primer, postavljanjem koordinatnog sistema tako da je z-osa paralelna vektoru \vec{B} dobijamo:

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \text{const.}, \quad \vec{B} = B_z \vec{k},$$

čime se sistem (D-2.2.8) znatno pojednostavljuje:

$$\frac{d\beta_x}{dt} = k\beta_y B_z \quad (\text{D-2.2.9a})$$

$$\frac{d\beta_y}{dt} = -k\beta_x B_z \quad (\text{D-2.2.9b})$$

$$\frac{d\beta_z}{dt} = 0. \quad (\text{D-2.2.9c})$$

Poslednja jednačina može da se neposredno integrali, odakle dobijamo:

$$\beta_z = \text{const.}, = C_3. \quad (\text{D-2.2.10})$$

Vrednost konstante C_3 određuje se iz početnih uslova koji se određuju prema prirodi problema koji se razmatra.

Preostale dve jednačine (D-2.2.9a) i (D-2.2.9b) međusobno su spregnute i lako se rešavaju svodenjem na jednu diferencijalnu jednačinu drugog reda. Diferenciranjem (D-2.2.9a) dobijamo:

$$\frac{d^2\beta_x}{dt^2} = k\beta_z \frac{d\beta_y}{dt}$$

a zamenom izvoda $d\beta_y/dt$ iz (D-2.2.9b):

$$\frac{d^2\beta_x}{dt^2} = -k^2\beta_z^2\beta_x,$$

odnosno:

$$\frac{d^2\beta_x}{dt^2} + k^2\beta_z^2\beta_x = 0. \quad (\text{D-2.2.11})$$

Ova diferencijalna jednačina drugog reda rešava se na standardni način. Karakteristična jednačina je:

$$\lambda^2 + k^2\beta_z^2 = 0$$

sa rešenjima:

$$\lambda_1 = +ik\beta_z, \quad \lambda_2 = -ik\beta_z \quad i = \sqrt{-1}$$

a opšte rešenje:

$$\begin{aligned} \beta_x &= a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= a_1 e^{+ik\beta_z t} + a_2 e^{-ik\beta_z t} \\ &= a_1 \cos(k\beta_z t) + ia_1 \sin(k\beta_z t) + a_2 \cos(k\beta_z t) - ia_2 \sin(k\beta_z t) \\ &= (a_1 + a_2) \cos(k\beta_z t) + i(a_1 - a_2) \sin(k\beta_z t) \end{aligned}$$

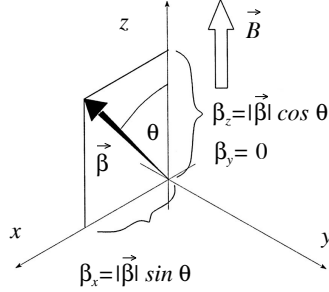
odnosno:

$$\beta_x = C_1 \cos(k\beta_z t) + C_2 \sin(k\beta_z t). \quad (\text{D-2.2.12})$$

Koeficijente C_1 i C_2 nalazimo iz početnih uslova kojima se određuje početni položaj vektora $\vec{\beta}$ u prostoru.

Neka je za $t=0$ vektor $\vec{\beta}$ u xz -ravni, pod uglom θ u odnosu na vektor \vec{B} , Slika D-2.2.1 Tada je:

$$\beta_z(0) = |\beta| \cos \theta, \quad \beta_x(0) = |\beta| \sin \theta \quad \text{i} \quad \beta_y(0) = 0.$$

Slika D-2.2.1 Početni položaj vektora $\vec{\beta}$ za $t=0$.

Za komponentu β_x iz jednačine (D-2.2.12), primenom odgovarajućeg početnog uslova $\beta_x(0) = |\vec{\beta}| \sin \theta$, nalazimo:

$$|\vec{\beta}| \sin \theta = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)$$

$$C_1 = |\vec{\beta}| \sin \theta$$

i:

$$\beta_x = |\vec{\beta}| \sin \theta \cos(kB_z t) + C_2 \sin(kB_z t).$$

Konstantu C_2 nalazimo iz početnih uslova, upoređivanjem izvoda poslednjeg izraza:

$$\frac{d\beta_x}{dt} = -kB_z |\vec{\beta}| \sin \theta \sin(kB_z t) + kB_z C_2 \cos(kB_z t)$$

sa jednačinom (D-2.2.9a). Izjednačavanjem desnih strana izraza, nalazimo:

$$\beta_y = -|\vec{\beta}| \sin \theta \sin(kB_z t) + C_2 \cos(kB_z t)$$

odakle primenom početnog uslova $\beta_y(0) = 0$, sledi:

$$C_2 = 0.$$

Zamenom nadenih vrednosti za konstante, konačno imamo:

$$\beta_x = |\vec{\beta}| \sin \theta \cos(kB_z t) \quad (\text{D-2.2.13a})$$

$$\beta_y = -|\vec{\beta}| \sin \theta \sin(kB_z t) \quad (\text{D-2.2.13b})$$

i:

$$\beta_z = |\vec{\beta}| \cos \theta. \quad (\text{D-2.2.13c})$$

Poslednju jednačinu dobili smo unošenjem početnog uslova u izraz (D-2.2.10).

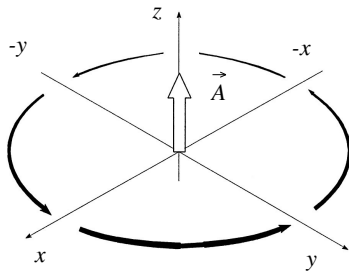
Rešenje za komponentu β_z , je najjednostavnije. S obzirom na to da je β_z stalno, kao i $|\vec{\beta}|$ sledi i da je $\cos\theta = \text{const.}$, odnosno da vektor $\vec{\beta}$ tokom vremena ne menja ugao u odnosu na z -osu (i na vektor \vec{B}).

Kretanje poprečnih komponenta β_x i β_y , najlakše se razume ako uočimo da je:

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = |\vec{\beta}|^2 \sin^2\theta = r^2.$$

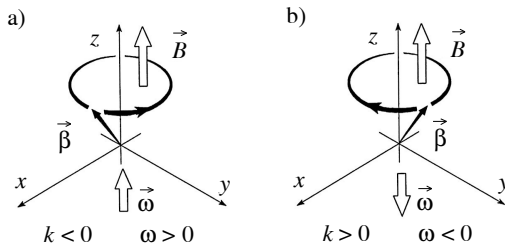
Poslednji izraz predstavlja jednačinu kruga. Komponente β_x i β_y menjaju se tokom vremena ali je zbir njihovih kvadrata stalan. To znači da projekcija vektora $\vec{\beta}$ na x, y -ravan ima stalan intenzitet krećući se po krugu. S obzirom na sinusnu, odnosno kosinusnu zavisnost komponenta β_y i β_x , vektor $\vec{\beta}$ kruži stalnom frekvencijom oko z -ose. Pozitivna rotacija oko z -ose odvija se u smeru $x \rightarrow y \rightarrow -x \rightarrow -y \rightarrow x$, Slika D-2.2.2. Zbog negativnog znaka sinusnog člana u jednačini (D-2.2.13b), rotacija o kojoj je reč odvija se u smeru $x \rightarrow -y \rightarrow -x \rightarrow y \rightarrow x$, tj. rotacija je negativna. Tada je:

$$\omega = -kB_z. \quad (\text{D-2.2.14a})$$



Slika D-2.2.2 Rotacija se predstavlja vektorom sa osom rotacije čiji se smer u desnom koordinatnom sistemu određuje pravilom desne ruke. Rotacija oko neke ose je pozitivna kada je vektor rotacije paralelan sa smerom te ose. Vektor rotacije može da bude ugao, ugaona brzina, ugaono ubrzanje i iz njih izvedeni vektori (ugaoni moment, moment sile, itd.). Na primer, pozitivna rotacija oko z -ose odvija se u smeru $x \rightarrow y \rightarrow -x \rightarrow -y \rightarrow x$; vektor rotacije \vec{A} paralelan je z -osi. Negativna rotacija oko z -ose odvija se u suprotnom smeru $x \rightarrow -y \rightarrow -x \rightarrow y \rightarrow x$; vektor rotacije \vec{A} tada je antiparalelan z -osi.

Smer rotacije zavisi od znaka skalarne konstante koja može da bude pozitivna i negativna, što zavisi od fizičke prirode problema koji se razmatra. Kada je konstanta k pozitivna, vektor $\vec{\beta}$ rotira oko vektora \vec{B} po pravilu leve ruke (negativan smer). Ako je rotacija negativna, ide po pravilu desne ruke u odnosu na pozitivni smer vektora \vec{B} , Slika D-2.2.3. Kružnu frekvenciju možemo da izrazimo i kao vektor paralelan osi rotacije čiji smer određuje smer rotacije. U vektorskom obliku je:



Slika D-2.2.3 Smer (znak) rotacije koju opisuje sistem jednačina (D-2.2.13) zavisi od predznaka skalarne konstante k : a) za negativno k rotacija je pozitivna; vektor kružne frekvencije paralelan je z -osi (i magnetnom polju \vec{B}); b) za pozitivno k rotacija je negativna. Vektor kružne frekvencije je antiparalelan z -osi (i magnetnom polju).

$$\vec{\omega} = -k\vec{B}. \quad (\text{D-2.2.14b})$$

Znači, pri stalnim vrednostima intenziteta vektora $\vec{\beta}$ i \vec{B} diferencijalnom jednačinom (D-2.2.7) izražava se rotacija vektora $\vec{\beta}$ oko vektora \vec{B} stalnom kružnom frekvencijom koja je proporcionalna intenzitetu vektora \vec{B} , a čiji smer zavisi od predznaka skalarne konstante.

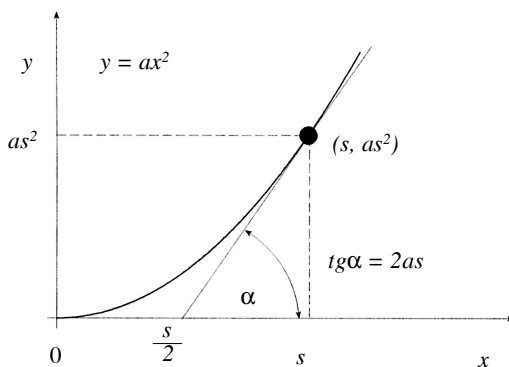
D-2.2.5 Parabola i njena tangenta

Ovde razmatramo geometrijski problem na koji ćemo naići prilikom izračunavanja otklona elektronskog snopa u električnom ili magnetnom polju konačnih dimenzija. Treba da odredimo mesto na kome će tangenta parabole, $y = ax^2$ presecati x -osu. Tangenta parabole je prava koja prolazi kroz izabranu tačku i ima nagib koji je jednak prvom izvodu parabole u toj tački. Jednačina parabole je:

$$y = ax^2$$

a njen prvi izvod:

$$y' = 2ax.$$



Slika D-2.2.4 Prava koja dodiruje parabolu na apscisi, s , preseca apscisnu osu na vrednosti $s/2$.

Vrednost funkcije u izabranoj tački $x = s$ je:

$$y_s = as^2$$

a njenog prvog izvoda:

$$y'_{x=s} = 2as.$$

Jednačina prave koja prolazi kroz tačku (s, y_s) i koja ima nagib $2as$ je:

$$\frac{y - y_s}{x - s} = 2as.$$

Presek prave sa x -osom, x_0 , dobijamo iz vrednosti x kada je $y=0$:

$$x_0 = s - \frac{y_s}{2as},$$

ili pošto je y_s tačka zajednička za pravu i parabolu $y_s = as^2$, dobijamo:

$$x_0 = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}. \quad (\text{D-2.2.15})$$

Prema tome, tangenta parabole (čije je teme u koordinatnom početku), povučena u proizvoljno izabranoj tački seče x -osu na polovini vrednosti apscise izabrane tačke.

Kada telo koje nije u dodiru sa drugim telom dobija ubrzanje bez vidljivog uzročnika (ili kada na telo treba da se deluje silom da bi se sprečilo njegovo ubrzanje), tada kažemo da je ono izloženo delovanju **polja sile**. Polja sile sa kojima se najčešće srećemo su gravitaciono, električno i magnetno polje. Poslednja dva mogu da se smatraju i graničnim slučajevima jedinstvenog **elektromagnetnog polja**.

Pošto primena električnog i magnetnog polja predstavlja osnovni način za upravljanje naelektrisanim česticama i ispitivanje njihovih osobina, ukratko ćemo opisati ponašanje naelektrisanih čestica u njima.

2.2.1 Naelektrisana čestica (elektron) u električnom polju

Jačina električnog polja \vec{E} izražava se kao sila po jedinici naelektrisanja koja deluje na malo probno naelektrisanje Δq , postavljeno u polje:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q}.$$

(Probno naelektrisanje Δq mora da bude malo da ne bi sopstvenim poljem remetilo spoljašnje polje koje se meri.) Otuda, na proizvoljno naelektrisanje q u spoljašnjem električnom polju \vec{E} deluje sila \vec{F}_E :

$$\vec{F}_E = q\vec{E}. \quad (2.2.1)$$

Imajući na umu da svaka sila telu čija je masa m , saopštava ubrzanje \vec{a} (D-1.2.2), za slobodno naelektrisanje q čija je masa m , saglasno jednačini (2.2.1) imamo:

$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}. \quad (2.2.2)$$

U opštem slučaju, električno polje \vec{E} može da zavisi kako od vremena tako i od prostornih koordinata, pa i ubrzanje \vec{a} zavisi od prostornih i vremenskih koordinata čestice. Međutim, mi ćemo da razmatramo samo slučaj stacionarnih električnih polja, tj. polja koja se ne menjaju tokom vremena i koja imaju jednostavnu zavisnost od prostornih koordinata. Najjednostavniji slučaj je kada polje ne zavisi ni od vremena ni od koordinata, tj. kada je polje konstantno i homogeno. Pri tome, uzimamo da je polje usmereno duž x -ose, $\vec{E} = E_x \vec{i}$. Putanju naelektrisanе čestice koja je pri $t = 0$ bila u koordinatnom početku $x(0) = 0$ i u stanju mirovanja $v_x = 0$, lako nalazimo dvostrukim integraljenjem izraza (2.2.2). Prvim integraljenjem dobijamo brzinu kao funkciju vremena:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$v_x = \int a_x dt = a_x \int dt = a_x t \quad (2.2.3)$$

$$v_x = \frac{q}{m} E_x t$$

a drugim, koordinatu (položaj) kao funkciju vremena:

$$x = \int v_x dt = \frac{q}{m} E_x \int t dt$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_x t^2. \quad (2.2.4)$$

Korišćenjem izraza (2.2.3) i (2.2.4) lako se izračunava kinetička energija T koju čestica dobija kretanjem kroz stalno električno polje:

$$T = \frac{1}{2} m v_x^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{q}{m} E_x t \right)^2 \quad (2.2.5)$$

$$= \frac{q^2 E_x^2 t^2}{2m}.$$

Uklanjanjem vremena t , pomoću izraza (2.2.4), dobijamo:

$$T = x q E_x. \quad (2.2.6)$$

Imajući na umu da je qE_x jednako sili polja koja deluje na česticu, sledi:

$$T = F_x x, \quad (2.2.7)$$

tj. kinetička energija naelektrisane čestice ubrzanje poljem E_x , na putu x , jednaka je radu koji je sila polja izvršila pomerajući česticu na tom putu. Pošto je pad potencijala u stalnom polju E_x na putu x jednak proizvodu električnog polja i rastojanja x , $\Delta U = E_x x$, konačno dobijamo:

$$T = q\Delta U. \quad (2.2.8)$$

U atomskoj, nuklearnoj i u fizici čestica, energija se obično izražava u elektronvoltima eV , milion elektronvoltima MeV , milijardu elektronvoltima GeV , itd. Elektronvolt je energija koju čestica jediničnog naelektrisanja e ($e = 1,60 \times 10^{-19} C$) dobije pri prolasku kroz pad potencijala od 1 V:

$$\begin{aligned} 1eV &= 1e \times 1V \\ &= (1,60 \times 10^{-19} C) \times (1V) \\ &= 1,60 \times 10^{-19} CV \\ &= 1,60 \times 10^{-19} J. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Po preporuci iz 1998. godine, prihvaćen je odnos:

$$1eV = 1,602176462(63) \times 10^{-19} J. \quad (2.2.10)$$

2.2.2 Naelektrisana čestica u magnetnom polju: vektori brzine i polja uzajamno normalni

Posmatrajmo sada naelektrisanu česticu u konstantnom, homogenom magnetnom polju ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$). Saglasno izrazu (D-2.2.6), sila kojom magnetno polje deluje na česticu je $q\vec{v} \times \vec{B}$ i jednačina kretanja ima oblik:

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.2.11)$$

S obzirom na to da se u izrazu pojavljuje vektorski proizvod, ubrzanje \vec{a} uvek je normalno na brzinu \vec{v} i na pravac magnetnog polja \vec{B} . Zbog toga, komponenta brzine paralelna polju \vec{B} ostaje stalna. Za sada ćemo da zanemarimo ovu komponentu brzine uzevši da se kretanje odvija u ravni normalnoj na pravac magnetnog polja \vec{B} , kao što je pokazano na Slici 2.2.1. Pošto je ubrzanje (promena brzine) normalno na vektor brzine, veličina (intenzitet) vektora brzine ostaje neizmenjena. Tokom vremena menja se samo njegov pravac, što je odlika ravnomernog kružnog kretanja. Ako je poluprečnik putanje r , centripetalno ubrzanje je v^2/r , a centripetalna sila mv^2/r . Pošto je ova sila (centripetalna) uzrokovana delovanjem magnetnog polja B na naelektrisanu česticu, mase m i naelektrisanja q , koja se kreće brzinom v , onda je:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad (2.2.12)$$

odakle može da se izračuna poluprečnik kružne orbite:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (2.2.13)$$

i frekvencija kružnog kretanja.

Kako je to uobičajeno, linearnu frekvenciju ν određujemo kao broj krugova koje čestica opiše u jedinici vremena:

$$\nu = \frac{\text{put u jedinici vremena (periferna brzina)}}{\text{put u jednom krugu (obim kruga)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{v}{r} \quad (2.2.14a)$$

a cirkularnu (kružnu) frekvenciju ω kao broj radijana u jedinici vremena:

$$\omega = \frac{\text{put u jedinici vremena (brzina)}}{\text{put po jednom radijanu (radijus kruga)}} = \frac{v}{r}. \quad (2.2.14b)$$

Očigledno je:

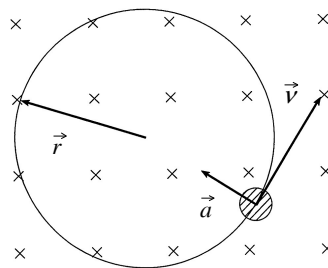
$$\omega = 2\pi\nu.$$

Izračunavajući ν/r iz jednačine (2.2.13), neposredno dobijamo:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{v}{r} = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B \quad (2.2.14c)$$

$$\text{i:} \quad \omega = \frac{q}{m} B. \quad (2.2.14d)$$

Ova frekvencija, izražena bilo kao linearna ili kao kružna, naziva se **ciklotronska** frekvencija. Treba uočiti da ona zavisi samo od magnetnog polja i od odnosa naelektrisanja i mase čestice. Ciklotronska frekvencija ne zavisi od brzine čestice. (Ovo je tačno samo za nerelativističko kretanje, tj. za $v \ll c$.)



Slika 2.2.1 Kružna orbita (putanja) pozitivno naelektrisanе čestice u homogenom magnetnom polju. Magnetno polje je normalno na ravan crteža, usmereno od posmatrača ka crtežu.

Takođe, naglasimo to da ciklotronska frekvencija ne zavisi od znaka naelektrisanja čestice, a da od znaka naelektrisanja zavisi smer rotacije.

2.2.3 Čestica u homogenom magnetnom polju – opšti slučaj

U opštem slučaju, naelektrisana čestica može da se nađe u kombinovanom električnom i magnetnom polju (elektromagnetnom polju) koje zavisi kako od vremena tako i od položaja (koordinata) čestice. I tada izraz za Lorencovu silu (D-2.2.5), ima isti oblik s tim što su sve promenljive (izuzev naelektrisanja) funkcije vremena t i prostornih koordinata x, y, z :

$$\vec{F}(x, y, z, t) = q\vec{E}(x, y, z, t) + q\vec{v}(x, y, z, t) \times \vec{B}(x, y, z, t). \quad (2.2.15)$$

Ova jednačina najčešće ne može da se reši analitički. Međutim, podešavanjem eksperimentalnih uslova, primenom približnih metoda, korišćenjem računara i sl., ona može uvek da se svede na oblik koji može praktično da se koristi. Zavisnost od vremena može da se ukloni primenom konstantnih polja, a zavisnost od koordinata uklanjanje se korišćenjem homogenih polja. Na primer, u detektorima elementarnih čestica kao što su maglena ili mehurasta komora, električno polje jednako je nuli $E = 0$, a magnetno polje je konstantno, homogeno, $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0$, pa se izraz (2.2.15) svodi na oblik:

$$\vec{F}(t) = q\vec{v}(t) \times \vec{B}_0. \quad (2.2.16)$$

Brzina naelektrisane čestice menja se tokom vremena zbog toga što jonizujućim sredinom kroz koju prolazi, čestica gubi kinetičku energiju. Analizirajući slike tragova koje naelektrisane čestice ostavljaju u maglenoj ili mehurastoj komori, primenom jednačine (2.2.16) može da se bliže odredi priroda čestice, njeno uzajamno dejstvo sa drugim česticama i sl.

Jednačina (2.2.16) može da se dalje pojednostavi tako što se primenjuje samo na kratki vremenski interval u kojem se brzina čestice neznatno menja, tj. $|\vec{v}(t)| \approx |\vec{v}|$ ili tako što se podešavanjem eksperimentalnih uslova ta brzina zaista učini stalnom (na primer, čestica u visokom vakuumu). Tada je:

$$\vec{F}(t) = q\vec{v}(t) \times \vec{B}_0,$$

odnosno:

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}_0, \quad (2.2.17a)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}_0. \quad (2.2.17b)$$

Jednačine (2.2.17a) i (2.2.17b) opisuju kretanje naelektrisane čestice čija je masa m , naelektrisanje q i brzina \vec{v} , u konstantnom, homogenom magnetnom polju \vec{B}_0 . Pri

tome početni pravac vektora brzine \vec{v} ima proizvoljnu orijentaciju u odnosu na pravac magnetnog polja. Rešavanje jednačine ove vrste detaljno je opisano u odeljku D-2.2.4. Rešenja dobijamo neposredno iz (D-2.2.13 a,b,c) ako uočimo odgovarajuću jednoznačnu vezu između veličina koje su korišćene u izrazima (D-2.2.7) i (2.2.17b):

$$\vec{\beta} = \vec{v}, \quad k = \frac{q}{m} \text{ i } \vec{B} = \vec{B}_0.$$

Tada je:

$$v_x = |\vec{v}| \sin \theta \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \quad (2.2.18a)$$

$$v_y = -|\vec{v}| \sin \theta \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \quad (2.2.18b)$$

$$v_z = |\vec{v}| \cos \theta. \quad (2.2.18c)$$

Ova posebna rešenja dobijena su za sledeće geometrijske i početne uslove: brzina \vec{v} zaklapa ugao θ sa vektorom magnetnog polja \vec{B} koji je paralelan sa z -osom; za $t = 0$:

$$v_x(0) = |\vec{v}| \sin \theta$$

$$v_y(0) = 0$$

$$v_z(0) = |\vec{v}| \cos \theta.$$

Drugim rečima, u trenutku kada počinjemo da merimo vreme, vektor \vec{v} nalazi se u xz -ravni, pod uglom θ u odnosu na z -osu i na vektor \vec{B} (koji je paralelan z -osi). Iz rešenja (2.2.18) sledi da vektor brzine \vec{v} tokom vremena rotira oko vektora polja \vec{B} ugaonom brzinom (frekvencijom) ω , koja je, saglasno izrazu (D-2.2.14a):

$$\omega = -\frac{q}{m} B_z \quad (2.19a)$$

ili u vektorskom obliku:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}. \quad (2.2.19b)$$

Zbog negativnog znaka, ako usvojimo da radimo u **desnom** koordinatnom sistemu, negativno naelektrisane čestice imaju pozitivnu frekvenciju, a pozitivno naelektri-

sane negativnu frekvenciju. Pozitivna frekvencija označava da se rotacija odvija po pravilu desne ruke u odnosu na pozitivni pravac z -ose.

Jasniju fizičku sliku o kretanju čestice dobijamo ako umesto brzine posmatramo koordinate čestice. Zavisnost koordinata čestice od vremena (putanju čestice) dobijamo integraljenjem izraza za komponente brzine. S obzirom na jednostavnost izraza (2.2.18), integraljenje se vrši neposredno, odakle dobijamo:

$$x = \frac{|\vec{v}|}{\omega} \sin \theta \sin \omega t + C_1 \quad (2.2.20a)$$

$$y = \frac{|\vec{v}|}{\omega} \sin \theta \cos \omega t + C_2 \quad (2.2.20b)$$

$$z = |\vec{v}| t \cos \theta + C_3. \quad (2.2.20c)$$

Kao i obično, konstante C_1 , C_2 i C_3 zavise od početnih uslova. Ovde biramo početne uslove tako da konstante C_1 , C_2 i C_3 budu jednake nuli. To ne menja prirodu putanje već menja samo njen položaj u odnosu na proizvoljno izabran koordinatni početak. Znači, za $t = 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = -(|\vec{v}| \cdot \sin \theta)/\omega$ i $z(0) = 0$ pa je:

$$x = \frac{|\vec{v}|}{\omega} \sin \theta \sin \omega t \quad (2.2.21a)$$

$$y = \frac{|\vec{v}|}{\omega} \sin \theta \cos \omega t \quad (2.2.21b)$$

$$z = v_z^0 t. \quad (2.2.21c)$$

U pravcu z -ose (magnetnog polja) čestica se kreće stalnom brzinom $|\vec{v}| \cos \theta$, koja zapravo predstavlja početnu vrednost z -komponente brzine.

Oblik putanje u xy -ravni, mada očigledan i iz izraza (2.2.21a,b), najlakše se uočava iz jednostavne jednačine:

$$x^2 + y^2 = \frac{|\vec{v}|^2}{\omega^2} \sin^2 \theta = \text{const.}$$

iz koje očigledno sledi da je putanja kružna i da je njen poluprečnik $(v_0/\omega) \sin \theta$:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.2.22)$$

Slaganjem ove dve komponente kretanja (u xy -ravni i u pravcu z -ose) dobijamo da čestica u prostoru opisuje spiralu čiji je poluprečnik:

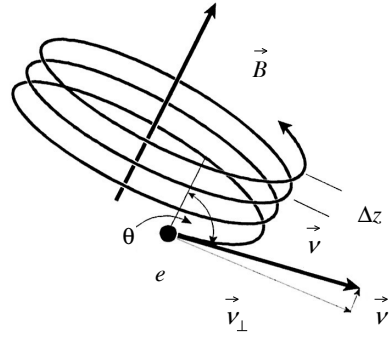
$$r = \frac{|\vec{v}|}{\omega} \sin \theta = \frac{m |\vec{v}|}{q B_z} \sin \theta \quad (2.2.23)$$

i hod:

$$\Delta z = \frac{|\vec{v}|}{v} \cos \theta = 2\pi \frac{|\vec{v}|}{\omega} \cos \theta \quad (2.2.24)$$

kao što je prikazano na Slici 2.2.2. Treba uočiti da se poseban slučaj opisan u odeljku 2.2.2. neposredno dobija iz ovih razmatranja ako se uzme da je $\theta = 90^\circ$. Drugi granični slučaj dobijamo za $\theta = 0$, kada je $x = y = 0$ i $z = |\vec{v}|t$. Naelektrisana čestica koja uleće paralelno u magnetno polje prolazi kroz polje ne menjajući ni pravac ni brzinu kretanja.

Slika 2.2.2 U konstantnom homogenom magnetnom polju naelektrisana čestica kreće se po spiralnoj putanji, čija je osa paralelna sa pravcem polja i čiji hod i poluprečnik zavise od ugla između vektora \vec{B} i \vec{v} , kao i od njihovih intenziteta.



U opštem slučaju, bez obzira na izbor koordinatnog sistema, kada su početna brzina naelektrisane čestice \vec{v} i vektor spoljašnjeg magnetnog polja \vec{B} pod proizvoljnim uglom, čestica se kreće po spirali čija je osa paralelna vektoru polja \vec{B} .

2.2.4 Elektron u električnom polju konačnih dimenzija

Na osnovu kretanja naelektrisanja u električnom i magnetnom polju može da se bliže odredi priroda čestice ili vrsta interakcije u kojoj ona učestvuje. Istorijski gledano, prvi takvi eksperimenti radeni su sa elektronima. Na osnovu kretanja elektrona u električnom i magnetnom polju, J. J. Thomson je odredio odnos e/m iz kojeg se, znajući naelektrisanje e , može odrediti i prava masa elektrona m . Pošto se za ove oglede koriste polja konačnih dimenzija (konačnih u odnosu na putanju elektrona), razmotrićemo kretanje elektrona pod tim uslovima.

Posmatrajmo najjednostavniji slučaj. Elektron se kreće brzinom v_x pravcu x -ose. Na putu dužine s_E deluje električno polje \vec{E} duž negativnog pravca y -ose. Uticaj električnog polja na elektron beleži se praćenjem njegovog položaja na fluorescentnom zastoru koji se nalazi na rastojanju l od izabranog koordinatnog početka, Slika 2.2.3:

$$\vec{E} = -E_y \vec{j}, \quad q = -e \quad (2.2.25)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \quad (2.2.26a)$$

ili u našem slučaju:

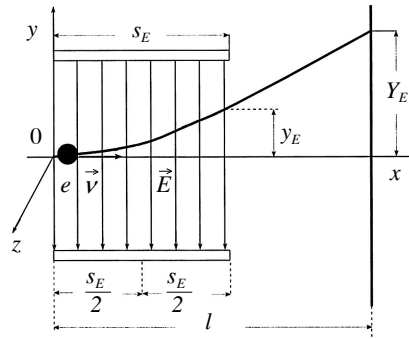
$$F_y \vec{j} = m a_y \vec{j} = e E_y \vec{j}. \quad (2.2.26b)$$

Odavde dobijamo izraz za ubrzanje koje električno polje saopštava elektronu:

$$a_y = \frac{e}{m} E_y. \quad (2.2.27a)$$

Pošto je y -koordinata elektrona jedini parametar koji (posredno) možemo da odredimo, potrebno je da se ubrzanje a_y izrazi preko koordinate y :

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.2.27b)$$



Slika 2.2.3 Kretanje elektrona u homogenom električnom polju. Elektron se prvobitno kretao u smeru x -ose. Polje deluje u pravcu y -ose (u negativnom smeru), u oblasti od 0 do s_E . Posle napuštanja polja, elektron se kreće pravolinijski do ekrana koji je na rastojanju l od koordinatnog početka.

pa je:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{m} E_y. \quad (2.2.28)$$

Odavde se dvostrukim integraljenjem dobija skretanje elektrona, y , pod uticajem električnog polja, $E_y \vec{j}$, koje deluje u vremenu t :

$$\int d\left[\frac{dy}{dt}\right] = \int \frac{e}{m} E dt + C_1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}Et + C_1$$

(2.2.29a)

$$\int dy = \int \left[\frac{e}{m}Et + C_1 \right] dt + C_2$$

$$y = \frac{e}{m}E\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Konstante integraljenja C_1 i C_2 određujemo iz početnih uslova. U trenutku $t = 0$ elektron ima y -koordinatu nula, $y_{t=0} = 0$, kao i brzinu u pravcu y ose, $\{d(y)/dt\}_{t=0} = 0$, te je i $C_1 = C_2 = 0$:

$$y = \frac{e}{m}E\frac{t^2}{2}. \quad (2.2.29b)$$

Ovde se t odnosi na vreme t_E koje elektron provede u električnom polju. Pošto polje deluje na putu s_E koji elektron prevali krećući se stalnom brzinom v_x u vremenu t_E , to je:

$$t_E = \frac{s_E}{v_x} \quad (2.2.30)$$

odakle konačno dobijamo izraz za skretanje elektrona neposredno po izlasku iz električnog polja:

$$y_E = \frac{eEs_E^2}{2mv_x^2}. \quad (2.2.31)$$

Međutim, nas zanima koliko je skretanje elektrona na fluorescentnom zaklonu, Y_E , pošto je to veličina koju možemo da merimo. S obzirom na to da po izlasku iz kondenzatora na elektron ne deluje više nikakva sila, on se od s_E do l kreće pravolinijski (po tangenti parabole u toj tački). Pošto [saglasno izrazu (D-2.2.7)] tangenta parabole u tački s_E seče x -osu u vrednosti $s_E/2$, iz podudarnosti trouglova očigledno je $(s_E/2)/(l - s_E/2) = y_E/Y_E$. Tako dobijamo izraz za skretanje elektrona na fluorescentnom ekranu Y_E u zavisnosti od osobina samog elektrona (e/m) i parametara uređaja u kojem se skretanje meri, E , s_E , l , v_x :

$$Y_E = \frac{y_E \left(l - \frac{s_E}{2} \right)}{\frac{s_E}{2}} = \frac{e}{m} \frac{E \left(l - \frac{s_E}{2} \right) s_E}{v_x^2}. \quad (2.2.32)$$

Iz ove jednačine dobijamo izraz za odnos naelektrisanja i mase elektrona, tj. specifično naelektrisanje:

$$\frac{e}{m} = \frac{v_x^2 Y_E}{E \left(l - \frac{s_E}{2} \right) s_E}. \quad (2.2.33)$$

2.2.5 Elektron u magnetnom polju konačnih dimenzija

Za razmatranje kretanja elektrona u magnetnom polju posmatraćemo situaciju sličnu prethodnoj. Elektron se kreće u pravcu x -ose brzinom v_x . U zoni dužine s_B na njega deluje konstantno, homogeno, magnetno polje \vec{B} . Zbog toga elektron skreće u pravcu y -ose, što se registruje posmatanjem traga na fluorescentnom zastoru koji se nalazi na rastojanju l , Slika 2.2.4. Podrazumeva se da se u trenutku $t = 0$ elektron nalazi u koordinatnom početku i da se kreće samo u pravcu x -ose:

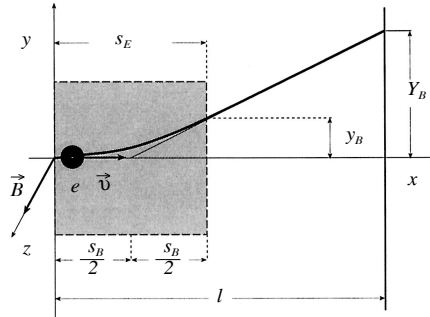
$$q = -e, \quad \vec{v} = v_x \vec{i}, \quad \vec{B} = B_z \vec{k}, \quad y_{t=0} = 0, \quad \left[\frac{dy}{dt} \right]_{t=0} = 0.$$

Iz izraza (D-2.2.6a):

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.2.34a)$$

dobijamo:

$$\vec{F} = -e(-v_x B_z) \vec{j} = e v_x B_z \vec{j} \quad (2.2.34b)$$



Slika 2.2.4 Kretanje elektrona u homogenom magnetnom polju. Elektron se prvobitno kretao paralelno x -osi. Magnetno polje deluje u smeru z -ose, koja je normalna na ravan crteža, u području od 0 do s_B . Po izlasku iz polja elektron se kreće ka zaklonu pravolinijski, po tangenti putanje koju je imao u tački $x=s_B$.

ili u sklaranom obliku:

$$F_y = e v_x B_z. \quad (2.2.34c)$$

Postupajući kao u prethodnom slučaju, $F_y = m a_y$, $a_y = d^2 y / dt^2$, dobijamo:

$$\frac{d\left[\frac{dy}{dt}\right]}{dt} = e v_x B_z, \quad (2.2.35)$$

a posle dvostrukog integraljenja uz navedene početne uslove:

$$y_B = \frac{e v_x B_z t_B^2}{m \cdot 2}. \quad (2.2.36)$$

Vreme t_B , dobijamo iz uslova da se elektron kreće stalnom brzinom v_x i da u tom vremenu prevali put s_B , $t_B = s_B / v_x$. Vezu između otklona na fluorescentnom zaklonu y_B , i osobina elektrona koje tražimo, nalazimo iz toga što znamo da se elektron posle napuštanja područja s_B (u kojem deluje magnetno polje) kreće pravolinijski (po tangenti prvobitne parabolične putanje). Pošto tangenta parabole povučena u tački s_B seče x -osu u tački $s_B/2$ (odjeljak D-2.2.5), sa Slike 2.2.4 nalazimo da je:

$$\frac{Y_B}{y_B} = \frac{l - \frac{s_B}{2}}{\frac{s_B}{2}}$$

što zamenom u (2.2.36) daje:

$$Y_B = \frac{y_B \left(l - \frac{s_B}{2}\right)}{\frac{s_B}{2}} = \frac{e B_z s_B \left(l - \frac{s_B}{2}\right)}{m v_x}. \quad (2.2.37)$$

I iz ovog izraza specifično naelektrisanje elektrona e/m može da se izrazi preko parametara uređaja i veličina koje mogu da se mere nezavisno. Međutim, određivanje brzine kretanja elektrona v_x nije uvek jednostavno, pa je najlakše da se određivanje specifičnog naelektrisanja izvede posmatranjem kretanja elektrona u kombinovanom električnom i magnetnom polju.

2.2.6 Elektron u kombinovanom električnom i magnetnom polju konačnih dimenzija – normalna polja

Posmatraćemo najjednostavniji slučaj kada su električno i magnetno polje uzajamno normalni i kada se elektron kreće u pravcu normalnom na delovanje oba polja. Situacija je istovetna sa prethodno opisanim eksperimentima, s tom razlikom

što električno polje deluje u pravcu y-ose izazivajući skretanje elektrona u suprotnom smeru od skretanja prouzrokovano magnetnim poljem, Slika 2.2.5. Tada se prvo odredi skretanje elektrona u jednom od polja, na primer u magnetnom Y_B , a zatim se to skretanje poništi delovanjem električnog polja. Tada je:

$$Y_B = Y_E \quad (2.2.38)$$

odakle se izjednačavanjem izraza (2.2.32) i (2.2.37) dobija:

$$v_x = \frac{E_y s_E \left(l - \frac{s_E}{2} \right)}{B_z s_B \left(l - \frac{s_B}{2} \right)}. \quad (2.2.39)$$

Zamenom ovog izraza u jednačinu (2.2.32) ili (2.2.37) (svejedno koju, pošto su skretanja ista) dobija se:

$$\frac{e}{m} = \frac{2E_y Y_{E,B} s_E \left(l - \frac{s_E}{2} \right)}{B_z^2 s_B^2 \left(l - \frac{s_B}{2} \right)^2} \quad \left(\frac{C}{kg} \right) \quad (2.2.40)$$

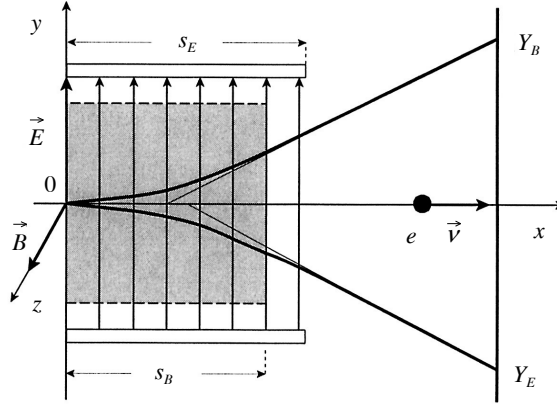
$$\frac{e}{m} = 1,76 \times 10^{11} \quad \frac{C}{kg}. \quad (2.2.41)$$

Znajući da je naelektrisanje elektrona $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C, možemo da izračunamo apsolutnu masu elektrona:

$$m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}. \quad (2.2.42)$$

Raspodela elektrona (ili u opštem slučaju naelektrisanih čestica) po brzinama predstavlja ozbiljan problem prilikom određivanja odnosa q/m primenom normalnih polja. Ovaj problem naročito je izražen kod pozitivnih jona koji još u elementarnom činu nastanka imaju značajnu kinetičku energiju. Ta raspodela energija ne menja se bitno ni posle primene električnog polja kojim se stvara jonski snop. Zbog toga, snopovi naelektrisanih čestica, ako se ne preduzimaju posebne mere da se to izbegne, sadrže čestice različitih brzina i energija. Iz izraza (2.2.39) vidi se da za datu kombinaciju polja E_y i B_z postoji samo jedna brzina pri kojoj će skretanje u električnom biti nadoknađeno skretanjem u magnetnom polju. Čestice koje imaju različite brzine od brzine koja je određena jednačinom (2.2.39), napraviće mali otklon naviše ili naniže, zbog čega će na ekranu, umesto dobro određene svetle tačke, da se pojavi vertikalna razmazana mrlja. Naravno, njen položaj ne može dobro da se odredi, pa otuda ni da se izmeri.

Slika 2.2.5 Kretanje elektrona u kombinovanom električnom i magnetnom polju. Magnetno polje deluje kao na Slici 2.2.4. Električno polje deluje u smeru y-ose. Pošto dva polja izazivaju skretanje elektrona u suprotnim smerovima, može da se podese da se ta dva uticaja potpuno poništavaju, tako da elektron stiže na ekran bez skretanja.



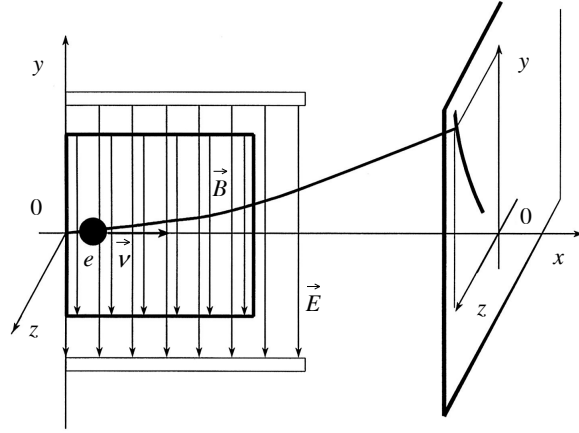
Postoji više metoda da se odnos q/m za naelektrisane čestice tačno odredi uprkos raspodeli čestice po brzinama od kojih ćemo ukratko da opišemo samo dve. U prvoj metodi, propuštanjem upadnog snopa čestica kroz filter brzina u uređaju za merenje odnosa q/m , prolaze samo čestice koje imaju odabranu brzinu i na njih može da se u potpunosti primeni postupak opisan u ovom odeljku. Kombinacija uzajamno normalnog električnog i magnetnog polja, za koju važi izraz (2.2.39), predstavlja najjednostavniji filter brzina. Ako su polja ujednačena i ako deluju u istom području ($S_E = S_B$), tada kroz njih bez skretanja prolaze samo čestice koje, saglasno jednačini (2.2.39), imaju brzinu određenu odnosom:

$$v_f = \frac{E}{B}. \quad (2.2.43)$$

Stavljanjem zaklona sa malim otvorom iza polja E i B , neskrenute čestice (one sa brzinom v_f) prolaze u uređaj za određivanje odnosa q/m , a one koje skreću (sa drugim brzinama) zadržava zaklon. Ozbiljan nedostatak ove metode je to što najveći deo upadnog fluksa ostaje neiskorišćen, pa joj to znatno smanjuje osetljivost.

2.2.7 Elektron u kombinovanom električnom i magnetnom polju konačnih dimenzija – paralelna polja

Druga metoda za merenje odnosa q/m kod čestica koje podležu nekoj raspodeli brzina zasniva se na primeni paralelnog električnog i magnetnog polja. Metoda u potpunosti odgovara onoj opisanoj u prethodnom odeljku, s tom razlikom što je magnetno polje zarotirano za 90° pa deluje paralelno sa električnim poljem, Slika 2.2.6. Tada se skretanje u električnom polju odvija kao i ranije, duž y-ose, a u magnetnom, zbog rotacije polja, duž z-ose. Uzimajući da su svi geometrijski uslovi isti kao i ranije (uzevši u obzir da zbog rotacije magnetnog polja iz B_z u $-B_y$ otklon Y_B prelazi u Z_B), iz izraza (2.2.32) i (2.2.37) dobijamo:



Slika 2.2.6 Kretanje elektrona u kombinovanom električnom i magnetnom polju. Oba polja, i električno i magnetno, deluju suprotno smeru y-ose. Pošto električno polje izaziva skretanje snopa po y-osi, a magnetno polje po z-osi, elektronski snop će skrenuti u yz-ravan. Kako veličina otklona u oba pravca zavisi od brzina čestice i to po y-osi od v^2 , a po z-osi od v , to će snop da se rasprši u yz-ravni obrazujući parabolu.

$$Y_E = y = \frac{e}{m} \frac{E_y \left(l - \frac{s_E}{2} \right) s_E}{v_x^2} \quad (2.2.44)$$

$$Z_B = z = \frac{e}{m} \frac{B_y \left(l - \frac{s_B}{2} \right) s_B}{v_x}. \quad (2.2.45)$$

Za razliku od ranije opisivanih slučajeva, ovde je brzina v_x promenljiva (zbog postojanja raspodele), pa ove jednačine predstavljaju par parameterskih jednačina. Zajednički parametar v_x može da se ukloni, pa otklon snopa po y-osi može da se izrazi kao funkcija otklona po z-osi:

$$y = \frac{m}{e} \frac{E_y \left(l - \frac{s_E}{2} \right) s_E}{\left[B_y \left(l - \frac{s_B}{2} \right) s_B \right]^2} z^2. \quad (2.2.46)$$

Otklon y proporcionalan je kvadratu otklona z , dakle, predstavlja parabolu čiji koeficijent zavisi kako od osobina čestice (e/m) tako i od parametara uređaja E , B , s . Za menom parametara uređaja jedinstvenom konstantom:

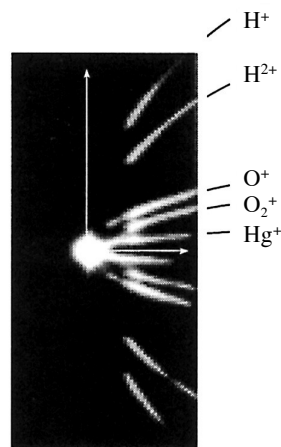
$$k = \frac{E_y \left(l - \frac{s_E}{2} \right) s_E}{\left[B_y \left(l - \frac{s_B}{2} \right) s_B \right]^2} \quad (2.2.47)$$

dobijamo da je:

$$y = \frac{k}{\left(\frac{e}{m}\right)} z^2. \quad (2.2.48)$$

To znači da otklon elektrona (ili drugih naelektrisanih čestica) u paralelnom magnetnom i električnom polju opisuje parabolu čiji koeficijent, u datom uređaju, zavisi samo od odnosa q/m naelektrisanih čestica.

Ako snop sadrži čestice sa različitim odnosima q/m (na primer, jonski snop smeša), tada odnos q/m može da se odredi za sve prisutne jonske vrste istovremeno, što predstavlja osnovu savremene masene spektrometrije, Slika 2.2.7.



Slika 2.2.7 Parabole pozitivnih jona koje je dobio J. J. Tomson u kombinovanom paralelnom električnom i magnetnom polju. Jonske vrste su identifikovane iz veličine skretanja. Da bi se bolje odredili parametri parabola, magnetno polje je invertovano u toku snimanja. Zbog toga su parabole simetrične u odnosu na y-osu. Središnja mrlja u koordinatnom početku potiče od jona koji su na zaklon prispeli pre uključivanja polja.

Prvi maseni spektrometar načinio je J. J. Tomson 1913. godine upravo primenom paralelnih polja.

2.2 Zadaci

Z-2.2.1 Elektron čija je energija 100 eV ulazi u homogeno električno polje koje je paralelno pravcu kretanja elektrona. Ako je jačina polja 2000 N/C (Njutna po kulonu), koliki će put da pređe elektron pre nego što se sasvim zaustavi?

[5,0 cm]

Z-2.2.2 Elektron sa kinetičkom energijom od 1 keV uleće u magnetno polje čija je indukcija 10^{-3} T. Izračunati poluprečnik putanje i vreme potrebno elektronu da opiše pun krug ako u polje uleće pod uglom:

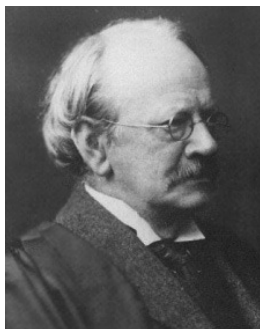
- 90°,
- 30°.

[$T = 3,58 \times 10^{-8}$ s; a) $r = 10,6$ cm; b) 5,32 cm]

Z-2.2.3 Izračunati poluprečnik putanje:

- elektrona,
- protona koji sa kinetičkom energijom od 300 eV uleću u magnetno polje čija je indukcija 5,0 mT, pod uglom od 30°.

[$r_{el} = 0,57$ cm; $r_{pr} = 24,4$ cm]



Ser Džozef Džon Tomson (Sir Joseph John Thomson, 1856–1940), rođen je u Mančesteru, a školovao se u Ovensovom koledžu u Mančesteru i u Triniti koledžu u Kembridžu. Od 1905. do 1918. bio je predavač Kraljevskog instituta. Tomson je otkrio elektron i tako postao prvi istraživač koji se bavio fizikom elementarnih čestica. Nobelovu nagradu za fiziku dobio je 1906. godine za teorijska i eksperimentalna istraživanja provođenja elektriciteta kroz gasove.

Robert Endrjus Miliken (Robert Andrews Milikan, 1868–1953), rođen je u Morisonu (Ilinois, SAD), pohađao je Oberlinski koledž i doktorirao 1895. na Kolumbija univerzitetu. Od 1921. do 1945. rukovodio je fizičkom laboratorijom Kalifornijskog tehnološkog instituta (Caltech). U prvim istraživanjima bavio se rendgenskim zračenjem i slobodnim širenjem gasova. Godine 1910. odredio je naelektrisanje elektrona. Takođe, veoma je poznat njegov rad na eksperimentalnoj potvrdi fotoelektričnog efekta. Godine 1923. dobio je Nobelovu nagradu za određivanje elementarnog naelektrisanja i za istraživanje fotoelektričnog efekta.

